数列の極限の再定義 (ε-δ 論法入門 1)

立命館大学理工学部数学学修相談会

2018 年 1 月 9 日 *

概要

数列の極限の ε-δ 論法 (δ が登場するのは関数の極限の場合からである. したがって数列に関しては ε-N 論法という場合もある) による定義に初めて出会った者のための解説である. 高校数学における数列の極限の定義では曖昧になってしまって, もう少し厳密な理論が必要になったとき ε-δ 論法に出会う. ε-δ 論法を用いた極限の定義の簡単な解説であり, 初学者用の内容である.

目次

1 はじめに

無限数列 $\{a_n\}$ において, 項の番号 n を限りなく大きくするとき, a_n が一定の値 α に限りなく近づくならば,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad 「n \to \infty \text{ のとき } a_n \to \alpha」$$

と書き, 数列 $\{a_n\}$ は α に収束するという. また α を数列 $\{a_n\}$ の極限値と言ったり, 数列 $\{a_n\}$ の極限は α であるともいう.

高校の数学において, 数列の極限は上のように習ったと思う. しかしながら, 「項の番号 n を限りなく大きくする」や「a_n が一定の値 α に限りなく近づく」の表現は実は非常に「曖昧 (あいまい)」であり, そのために直感では分かりにくい極限の問題では役に立たないことが多い. 例えば, 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \alpha$$

* 執筆 平岡由夫

であるが, これを示すのに高校の数学の知識では無理がある. また, 関数の極限においても同様である. この「曖昧」さを減らすために, ε-δ 論法と呼ばれる方法を使う.

自然数全体の集合 ($\{1, 2, 3, \ldots\}$), 実数全体の集合をそれぞれ

$$\mathbb{N}, \qquad \mathbb{R}$$

と記述することにする.

2 「近い」を考える

$a, b \in \mathbb{R}$ について,

「a と b が近い」

をどのように定義するかで, 様々な分野で応用のされ方が変わってくる. ここでは, 最も原始的で議論が分かりやすいように「a と b が近い」とは

「a と b の距離が小さい」

と定義する.

2.1 距離

2 つの実数 a と b について, 数直線上の 2 点 a と b との距離, つまりそれらの差の絶対値

$$|a - b|$$

を実数 a と b との距離と定義する. また, $|a - b| \geqq 0$ であり, 等号が成り立つのは $a = b$ に限る.

2.2 a と b が近い

前で定義したように「実数 a と b が近い」とは「実数 a と b の距離が小さい」と決めた. ここで距離とは負でない実数であるので「負でない実数 A が小さい」について考えてみよう. 「小さい」とはかなり曖昧な表現である. 「1 は小さい」と思う場合もあれば「$\dfrac{1}{100}$ でもまだまだ大きい」と思う人もいるであろう. 仮に「負でない実数 A が小さいとは A が $\dfrac{1}{2}$ 未満のことである」と定義してしまうならば

$$0, \qquad \frac{1}{3}, \qquad 0.01$$

などは「小さい」,

$$\frac{1}{2}, \qquad 1, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

などは「小さくない」と決めることが可能とある. 同様に「負でない実数 A が小さいとは 1 未満のことである」と定義しても「小さい」と「小さくない」が分類される. つまり, 正の実数 ε を基準にして「負でない実数 A が小さい」を

$$A < \varepsilon$$

と定義することは自然である. (ここで $A \leqq \varepsilon$ としてもしばらくは問題はないのだが, 今後の為に $A < \varepsilon$ としておく.) 今後, 「実数 a と b が近い」を正の実数 ε について

$$|a - b| < \varepsilon$$

が成り立つことであると定義してしまおう. ここで ε は「近い」を表現するための正の実数であることを理解しておこう. 例えば距離 1 で近いとしたいならば $\varepsilon = 1$ とし, 距離 $\dfrac{1}{2}$ で近いとしたいならば $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ とすれば良いということを意味している.

3　数列の極限の再定義

3.1　数列

順番に「数」を並べたものを数列という. 例えば

$$\{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

は第 1 番目が 1, 第 2 番目が 3, 第 3 番目が 5, 第 4 番目が 7, $\cdots$ の数列である.

数列における「数」が実数のときは実数列, 有理数のときは有理数列, (ここでは扱わないが) 複素数のときは複素数列と呼んだりする. 以下, 特にことわらない限り実数列のことを単に数列と呼ぶ.

数列を構成する数をそれぞれ項と呼び, 第 n 番目の数を数列の第 n 項という. 第 n 項が a_n である数列を $\{a_n\}$ であらわす.

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

例 1. $a_n = (-1)^n n$ のとき

$$\begin{aligned}
\{a_n\} &= \{(-1)^n n\} = \{-1, 2, -3, 4, \dots\}, \\
\{a_{n+1}\} &= \{(-1)^{n+1}(n+1)\} = \{2, -3, 4, -5, \dots\}, \\
\{a_{2n}\} &= \{(-1)^{2n}(2n)\} = \{2n\} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}
\end{aligned}$$

である.

3.2　数列の極限の再定義

数列の極限を ε-δ 論法 ($\varepsilon - N$ 論法) を用いて定義する. 数列の極限を定義するのに「近さ」を意味する正の実数 ε と項の番号についての条件を表すのに N を用いる. その意味を簡単に解説する.

まず初めに $a_n = \dfrac{1}{n}$ で定義される数列

$$\{a_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$$

を考える.

$$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2} = 0.5,\ a_3 = \frac{1}{3} = 0.333\cdots,\ a_4 = \frac{1}{4} = 0.25,\ a_5 = \frac{1}{5} = 0.2, \quad \dots$$

であり n を限りなく大きくすると a_n は限りなく 0 に近づく. つまり

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(感覚的にはこれで良いのだが, 実際に証明することは様々な議論が必要になるのでここでは深く考えない.) また「2 つの実数 a と b が近い」とは 「a と b の距離 $|a-b|$ が小さい」とするなら, n を大きくすると a_n と 0 の距離 $|a_n - 0|$ が 0 に近づくと思えばよく,

$$n \to \infty \text{ のとき } |a_n - 0| \to 0$$

と表現しても良い. a_n を用いないで

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

または

$$n\to\infty \text{ のとき } \left|\frac{1}{n}-0\right|\to 0$$

と表現しても良い. 一般に数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとき

$$n\to\infty \text{ のとき } |a_n-\alpha|\to 0$$

が成り立つ.

数列の極限を考えることは n が十分大きいときの第 n 項がどうなるかを考えることである. したがって, 以下で定義される数列 $\{b_n\}$, $\{b'_n\}$

$$b_n=\begin{cases}1 & (n<3)\\ \dfrac{1}{n} & (n\geqq 3)\end{cases}\ ,\quad b'_n=\begin{cases}1 & (n<100)\\ \dfrac{1}{n} & (n\geqq 100)\end{cases}$$

についても, 数列の極限はそれぞれ

$$\lim_{n\to\infty}b_n=0,\qquad \lim_{n\to\infty}b'_n=0$$

が成り立つ. 今の場合, 少なくとも 100 以上の n では a_n も b_n も b'_n もすべて同じ挙動であるので同じ極限値を持たなければならない.

α に収束する数列 $\{a_n\}$ について

$$n\to\infty \text{ のとき } |a_n-\alpha|\to 0$$

が成り立っているが, これを「n が十分大きいところでは」とは「ある十分大きな番号 N があってその N 以上の n については」と理解し, この「n が十分大きいところでは $|a_n-\alpha|$ が十分小さくなる.」とは「$n\geqq N$ について $|a_n-0|$ が十分小さくなるような自然数 N が存在する」と表現できる. これを論理記号を用いて表現すると

$$\exists N\in\mathbb{N} \text{ s.t. } n\geqq N \text{ において } |a_n-\alpha| \text{ が十分小さい}$$

となる. さらに「十分小さい」を表現するのに, 正の実数 ε を用いて

$$\exists N\in\mathbb{N} \text{ s.t. } |a_n-\alpha|<\varepsilon\quad (n\geqq N)$$

と理解してみよう. 例えば $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$ のとき先程の $\{b_n\}$ について

$$|b_1-0|=|b_2-0|=1\geqq\frac{1}{2}$$

であるが $n\geqq 3$ について

$$|b_n-0|<\frac{1}{2}$$

であるので $N=3$ とすれば

$$\exists N\in\mathbb{N} \text{ s.t. } |b_n-\alpha|<\varepsilon\quad (n\geqq N)$$

が成り立つ.

一般に

$$n \to \infty \text{ のとき } |a_n - \alpha| \to 0$$

が成り立つときは

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } |a_n - \alpha| < \varepsilon \quad (n \geqq N) \tag{1}$$

となる正の実数 ε が必ず存在する．ところが (1) を満たす正の実数 ε が存在するからといって

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

としてしまうのは間違いである．例えば

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & (n < 100) \\ \dfrac{1}{5} & (n \geqq 100) \end{cases}$$

で定義される数列 $\{c_n\}$ について考えよう．数列 $\{c_n\}$ は $\dfrac{1}{5}$ に収束する．確かに $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ のとき

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \left| c_n - \frac{1}{5} \right| < \varepsilon \quad (n \geqq N)$$

を満たしている ($N = 3$ とすればよい) から何の矛盾もないように思うかもしれない．しかし, 同時に

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \left| c_n - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon \quad (n \geqq N)$$

や

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } |c_n - 0| < \varepsilon \quad (n \geqq N)$$

も満たしてしまう．つまり, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{3}$ や $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ としても矛盾が生じない．これは 0 と $\dfrac{1}{3}$ と $\dfrac{1}{5}$ が「近い」と誤認していることが原因である．

結論から言うと一般に

$$n \to \infty \text{ のとき } |a_n - \alpha| \to 0$$

が成り立つときは**任意の**正の実数 ε について

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } |a_n - \alpha| < \varepsilon \quad (n \geqq N)$$

が成り立ち, 逆に, 任意の正の実数 ε について

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } |a_n - \alpha| < \varepsilon \quad (n \geqq N)$$

が成り立つとき

$$n \to \infty \text{ のとき } |a_n - \alpha| \to 0$$

が成り立つ．つまり

$$n \to \infty \text{ のとき } |a_n - \alpha| \to 0$$

と「任意の正の実数 ε について

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } |a_n - \alpha| < \varepsilon \quad (n \geqq N)$$

が成り立つ」は同値である．このことから

定義 3.1.

$$\begin{aligned}&\text{数列 } \{a_n\} \text{ が } \alpha \text{ に収束する} \qquad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \text{ と記す}\right)\\ &\overset{\text{def}}{\iff} \forall\varepsilon > 0 \text{ について } \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } |a_n - \alpha| < \varepsilon \quad (n \geqq N)\end{aligned}$$

と定義するのである. 定義の意味は, どんな「近さ」ε についてもある番号 N より先の n について a_n と α の距離 $|a_n - \alpha|$ を ε 未満にできるときに, 数列 $\{a_n\}$ は α に収束すると決めるということである. 特に数列の極限の定義に矢印 "$\to$" がないことに注目してほしい.

例 3.1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \iff \forall\varepsilon > 0 \text{ について } \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \quad (n \geqq N)$$

が成り立つ.

また, 次の命題を用いるならば $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ のとき

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ について } \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n \geqq N)$$

が成り立つことも分かる.

命題 3.2. 数列 $\{a_n\}$, 実数 $c > 0$, $\varepsilon > 0$ について

$$\begin{aligned}&\text{‘}\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } |a_n - \alpha| < \varepsilon \qquad (n \geqq N)\text{’}\\ &\iff \text{‘}\exists N' \in \mathbb{N} \text{ s.t. } |a_n - \alpha| < c \cdot \varepsilon \qquad (n \geqq N')\text{’}\end{aligned}$$

証明. ($\Longrightarrow$) 仮定より任意の $\varepsilon' = c\varepsilon > 0$ について

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon' \qquad (n \geqq N)$$

をみたす自然数 N が存在するので, $N' = N$ とすれば良い.
($\Longleftarrow$) 仮定より, 任意の $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{c} > 0$ について

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon' \qquad (n \geqq N')$$

をみたす自然数 N' が存在するので, $N = N'$ とすれば良い □

次に, 定義 3.1 を違った形で表現してみよう. 実数 α と正の実数 ε について $\mathbb{R}$ の部分集合 $U_\varepsilon(\alpha)$ を

$$U_\varepsilon(\alpha) = \{x \in \mathbb{R} \mid |\alpha - x| < \varepsilon\}$$

と定義する. $U_\varepsilon(\alpha)$ は点 α の ε-近傍と呼ばれ, $U_\varepsilon(\alpha)$ とは今の場合開区間 $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ に他ならない. また, この記号を用いれば

命題 3.3.

$$\begin{aligned}&\text{数列 } \{a_n\} \text{ が } \alpha \text{ に収束する}\\ &\iff \forall\varepsilon > 0 \text{ について } \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } a_n \in U_\varepsilon(\alpha) \quad (n \geqq N)\end{aligned}$$

であることは明らかであろう.

次に, 数列が収束するならばそれはただ 1 つの値に収束することを言っておこう.

命題 3.4. 数列 $\{a_n\}$ が収束するならばそれは 1 つの値に収束する

証明. 数列 $\{a_n\}$ が 2 つの値 α と β $(\alpha \neq \beta)$ に収束したとして矛盾を導く. ε を

$$U_\varepsilon(\alpha) \cap U_\varepsilon(\beta) = \emptyset$$

となるようにとる. 例えば

$$\varepsilon = |\alpha - \beta|/3$$

とする. 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとき, この ε についてある番号より大きな n について

$$a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$$

となるが

$$a_n \notin U_\varepsilon(\beta)$$

であるので数列 $\{a_n\}$ は β に収束することに矛盾する □

3.3 無限大に発散

数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき数列 $\{a_n\}$ は発散するという. 特に n を限りなく大きくするとき a_n が限りなく大きくなる数列 $\{a_n\}$ は (正の) 無限大に発散するという.

定義 3.5.

$$\begin{aligned} &\text{数列 } \{a_n\} \text{ が (正の) 無限大に発散する} \\ &\overset{\text{def}}{\iff} \forall G \text{ について } \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } a_n > G \quad (n \geqq N) \end{aligned}$$

であり, どんな大きな G を取ってきても n を大きくしていけばやがては a_n は G より大きくなるときに数列 $\{a_n\}$ が無限大に発散すると定義する. 数列 $\{a_n\}$ が (正の) 無限大に発散するとき,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = (+)\infty$$

と記す. また, 数列 $\{-a_n\}$ が無限大に発散するとき数列 $\{a_n\}$ は負の無限大に発散すると言って

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

と記す.

例 3.2. 数列 $\{n^2\}$ は無限大に発散する.

例 3.3. 次のように定義される数列 $\{a_n\}$ は負の無限大に発散する.

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数}) \\ -n & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

例 3.4. 数列 $\{(-1)^n\}$ や $\{(-1)^n n\}$ は発散する. しかし, 正の無限大にも負の無限大にも発散しない.