行列の計算ドリル

立命館大学理工学部数学学修相談会

2016 年 8 月 19 日 *

概要

大学入学後の出来るだけ早い段階で行列の基本的演算は修得しておかなければならない. そのための計算問題を約 100 問与える.

目次

1 はじめに

問題によっては途中の計算が重要な場合もある. 途中の計算も省略せずに記述できるように努力せよ.

この書における記号を挙げておく. 行列に関しては

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

のように大文字のアルファベットを用い, 具体的に成分を含めて表現するときは成分を “ [” と “] ” で括る. m 行 n 列からなる行列を「$m \times n$ 行列」と表現することもある. 特に $m \times m$ 行列を m 次正方行列という.

(i, j)–成分が a_{ij} の $m \times n$ 行列を $[a_{ij}]_{m,n}$ あるいは $[a_{ij}]$ と記す.

$$[a_{ij}]_{m,n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

成分の添え字に関して, 行を意味する添え字と列を意味する添え字は混乱の恐れがない場合は $a_{1,1}$ や $a_{1,2}$ などのように, コンマなどで区切らず上記のように a_{11} や a_{12} のように続けて記述する. 行ベクトル, 列ベクトルは

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

のように太字のアルファベット小文字を使用して表現する. また, スカラーは細字のアルファベット小文字を使用して表現する.

* 執筆 平岡由夫

行列 A の転置行列は ${}^tA$ と記す．例えば

$$
{}^t\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}
$$

である．m 行 n 列からなる零行列は $O_{m,n}$ または単に O と記す．例えば

$$
O_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

などである．n 次単位行列は E_n または単に E と記す．例えば

$$
E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

である．

2　成分, 行, 列, 転置行列

問題 2.1. 等式

$$
\begin{bmatrix} -1 & 0 & 7 \\ a & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b & c & -d \\ 2 & 3e & 6f \end{bmatrix}
$$

を満たす実数 a, b, c, d, e, f を答えよ．

問題 2.2. 2×2 の行列 A が等式

$$
\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 2 \\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{\multirow{2}{*}{A}} & 1 \\ & & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:cc} 1 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A}} \\ 0 & & \\ \hdashline 2 & 1 & 0 \end{array}\right]
$$

を満たすとき A を答えよ．

問題 2.3. 行列

$$
A = [a_{ij}]_{3,2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}
$$

について次の問いに答えよ．

(1) a_{21} は何か．
(2) A の第 2 行は何か．
(3) A の第 2 列は何か．
(4) A の転置行列 ${}^tA$ の第 1 列は何か．

問題 2.4. 列ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ を

$$
\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

とする．このとき行列 A, B を

$$
A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1 \\ {}^t\boldsymbol{a}_2 \\ {}^t\boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix}
$$

と定義するとき次の問いに答えよ．

(1) ${}^t\!A$ を求めよ.

(2) ${}^t\!B$ を求めよ.

(3) ${}^t\!\left({}^t\!A\right)$ を求めよ.

問題 2.5. 行列 A, D を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & -3 \end{bmatrix}$$

とする. さらに行列 M を

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

と定義する. 次の問いに答えよ.

(1) 行列 B, C, M のサイズを答えよ.

(2) ${}^t\!M$ を ${}^t\!B$, ${}^t\!C$ を用いて表せ.

3 行列の和と差, スカラー倍

問題 3.1. 行列 A, B を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

とするとき, 次の計算をせよ.

(1) $A + B$

(2) $B + A$

(3) $A - B$

(4) $B - A$

(5) ${}^t\!A + {}^t\!B$

(6) ${}^t(A + B)$

(7) ${}^t\!A - {}^t\!B$

(8) ${}^t(A - B)$

問題 3.2. 行列 A, B, C を

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とするとき, 次の計算をせよ.

(1) $(A + B) + C$

(2) $A + (B + C)$

(3) $(A - B) - C$

(4) $A - (B - C)$

問題 3.3. 行列 A, B を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

とするとき, 次の計算をせよ.

(1) $A - A$
(2) $B - B$
(3) $A + A + A$
(4) $\underbrace{A + A + \cdots + A}_{n}$

問題 3.4. 行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

とし, O を A と同じサイズの零行列とする. 次の計算をせよ.

(1) $A + O$
(2) $O + A$
(3) $A - O$
(4) $O - A$

問題 3.5. 行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

とする. このとき, 等式 $A + X = A$ を満たす行列 X を求めよ.

問題 3.6. 行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

とする. 次の問いに答えよ.

(1) $\frac{1}{2}A$ を求めよ.
(2) 等式 $A + X = 2A$ を満たす行列 X を求めよ.
(3) 等式 $A + Y = -\frac{1}{3}Y$ を満たす行列 Y を求めよ.

問題 3.7. 行列 A, B を

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

とする. 次の計算をせよ.

(1) $\frac{1}{2}(A - 3B)$
(2) $\frac{1}{2}A - \frac{3}{2}B$
(3) $\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}A\right)$
(4) $\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)A$
(5) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)(2A - 3B)$

問題 3.8. a, b をスカラーとし, 行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

とする. 次の計算をせよ.

(1) $a(bA)$
(2) $(ab)A$
(3) $(a-a)A$
(4) $aA+bA$
(5) $(a+b)A$

4 行列の積

問題 4.1. 行列 A, B を

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

とする. 次の計算をせよ.

(1) AB
(2) BA
(3) $A(BA)$
(4) $(AB)A$

問題 4.2. 行列 A, B を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ 1 & 3 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

とする. 次の問いに答えよ.

(1) AB, BA を求めよ.
(2) $A(BA)$ を求めよ.
(3) $(AB)A$ を求めよ.
(4) ${}^tA{}^tB$ を求めよ.
(5) ${}^t(AB), {}^t(BA)$ を求めよ.

問題 4.3. 行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

とする. 次の計算をせよ.

(1) AA
(2) $A(AA)$
(3) $(AA)A$

問題 4.4. 行列 A, D を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

とする. 次の問いに答えよ.

(1) A^2, A^3 を求めよ.
(2) D^2, D^3 を求めよ.
(3) D^n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ を求めよ.

問題 4.5. 行列 U を

$$U = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

とする. 次の計算をせよ.

(1) U^2
(2) U^3

問題 4.6. 行列 Z を

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 19 & 17 \\ 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とする. 次の計算をせよ.

(1) Z^2
(2) Z^3
(3) Z^4

問題 4.7. c をスカラー, 行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

とする. 次の計算をせよ.

(1) $AO_{3,3}$
(2) $O_{3,3}A$
(3) AE_3
(4) E_3A
(5) $(cE_3)A$
(6) $A(cE_3)$

問題 4.8. 行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

とする.

(1) 等式 $AO_{m,n} = O_{2,3}$ を満たす m, n を求めよ.

(2) 等式 $AO_{m,n} = O_{2,2}$ を満たす m, n を求めよ.
(3) 等式 $O_{m,n}A = O_{2,3}$ を満たす m, n を求めよ.
(4) 等式 $O_{m,n}A = O_{3,3}$ を満たす m, n を求めよ.

問題 4.9. 行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

とする.

(1) 等式 $E_mA = A$ を満たす m を求めよ.
(2) 等式 $AE_n = A$ を満たす n を求めよ.

問題 4.10. 行列 A, B を

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

とする. 次の問いに答えよ.

(1) AB, BA を求めよ.
(2) 等式 $AX = O$ を満たす 2 次正方行列 X を $\underline{\text{2 つ}}$ 見つけよ.

問題 4.11. 行列 A, B, C を

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

とする. 次の計算をせよ.

(1) $B + C$, BC, CB を求めよ.
(2) AB, AC を求めよ.
(3) BA, CA を求めよ.
(4) $A(B + C)$, $(B + C)A$ を求めよ.
(5) $(A + B)(A + C)$ を求めよ.
(6) $(A + C)(A + B)$ を求めよ.
(7) $(A + B)^2$ を求めよ.
(8) $A^2 + A(B + C) + BC$ を求めよ.
(9) $A^2 + BA + AC + BC$ を求めよ.
(10) $(A + B)(A - B)$, $A^2 - B^2$ を求めよ.

問題 4.12.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 11 & -17 \\ 3 & -1 & 16 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -9 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \right)$$

を計算せよ.

問題 4.13. 行列 A, B を

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

とし, X は 2 次正方行列であり, 等式

$$BXA = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \cdots \qquad (*)$$

を満たす. 次の問いに答えよ.

(1) AB を求めよ.
(2) X を求めよ.
(3) 等式 $(*)$ を利用して $(BXA)^n$ を求め, X^n を求めよ.

5 行列と連立 1 次方程式

問題 5.1. 4 次列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

とし, 行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix}$$

とする.

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3$$

を満たす c_1, c_2, c_3 を求めよ.

問題 5.2. n 次列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{n3} \end{bmatrix}$$

とし, 行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix}$$

とする.

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3$$

を満たす c_1, c_2, c_3 を一組求めよ.

問題 5.3. 等式

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

を満たす x_1, x_2 を求めよ.

問題 5.4. 等式

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

を満たす x_1, x_2 を求めよ.

問題 5.5. 等式

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を満たす x_1, x_2 を求めよ.

問題 5.6. 等式

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

を満たす x_1, x_2 を求めよ.