∞ は実数ではない

立命館大学理工学部数学学修相談会

2015 年 4 月 6 日 *

概要

「∞ は実数ではない」ことの説明.

目次

1 はじめに

数列や関数の極限を解答する際に, ∞ が実数であるまたは普通の数と同様の演算ができるものと誤解してしまっている解答を目にすることがある. 例えば

$$(\text{正しくない})\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}=0$$

などがある.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

は正しいのだが

$$(\text{正しくない})\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}$$

や

$$(\text{正しくない})\quad \frac{1}{\infty}=0$$

を平気で記述してしまうのは良くない. また, 極限 $\lim_{n\to\infty} n$ が

(正しくない) ∞ に**収束する**

も同様である.

これらの誤解は, 「∞ は実数である」と認識していることが原因になっていることが多い.

「∞ は実数ではない」

ほとんどの者にとっては既知の事実であると思われるが, その理由を考えたことは少ないと思われる. 以下より, その理由を「∞ が実数」だと都合が悪くなることを例にして説明する.

---

* 執筆 平岡由夫

2　実数の性質

「 n を限りなく大きくする」を

$$n \to \infty$$

と表現する．これはあくまでも「 n を限りなく大きくする」の意味であって

$$(\text{正しくない}) \quad n = \infty$$

とする意味ではない．例えば, 数列 $\{a_n\}$ において $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$ となっているとき

$$(\text{正しくない}) \quad a_\infty = 3$$

と表現しない．また, 関数の極限でも同様である $f(x) = \dfrac{3x+1}{x}$ において

$$f(x) = 3 + \frac{1}{x}$$

であるので $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$ となるが,

$$(\text{正しくない}) \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = f(\infty) = \frac{3\infty + 1}{\infty}$$

や

$$(\text{正しくない}) \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = f(\infty) = 3 + \frac{1}{\infty} = 3$$

と表現しない．この「表現しない」ことの理由が, これから述べる「∞ が実数ではない」からである．そのためには実数の性質をいくつか確認しておこう．

2.1　順序

実数全てからなる集合を $\mathbb{R}$ と記す．したがって集合の記号を用いると, 任意の実数 a は

$$a \in \mathbb{R}$$

と表現できる．

$\mathbb{R}$ には順序が決まる．つまり任意の $a, b \in \mathbb{R}$ について

$$a \leqq b \quad \text{または} \quad a \geqq b$$

の関係がが成り立つ．この “$\leqq$” や “$\geqq$” の関係には

(i) (反射律) $a \leqq a$
(ii) (同値律) $a \leqq b$, $a \geqq b$ ならば $a = b$
(iii) (推移律) $a \leqq b$, $b \leqq c$ ならば $a \leqq c$

の性質が成り立つ．$a \geqq b$ が成り立つとき「 a は b より大きいか等しい」という．

また, $a \leqq b$, $a \neq b$ のとき “$a < b$” と記し, 同様に $a \geqq b$, $a \neq b$ のとき “$a > b$” と記す．$a > b$ が成り立つとき「 a は b より大きい」という．

2.2 演算

実数 $\mathbb{R}$ には, 和・差・積・商の演算が定義される. すなわち $a, b \in \mathbb{R}$ について $a+b \in \mathbb{R}$, $a-b \in \mathbb{R}$, $ab \in \mathbb{R}$ であり $b \neq 0$ ならば $a/b \in \mathbb{R}$ である. これらの演算には次の性質が成り立つ.

(i) (和の結合律) $(a+b)+c = a+(b+c)$ が成り立つ.
(ii) (和の可換律) $a+b = b+a$ が成り立つ.
(iii) (零元の存在) 全ての a について $a+b=a$ を満たす共通の実数 b がある.($b=0$ である.)
(iv) (和の逆元の存在) どんな a についても $a+b=0$ をみたす実数 b が (各 a ごとに) 存在する.($b=-a$ とかく.)
(v) (積の結合律) $(ab)c = a(bc)$ が成り立つ.
(vi) (積の可換律) $ab = ba$ が成り立つ.
(vii) (和と積の分配律) $(a+b)c = ac+bc$ が成り立つ.
(viii) (単位元の存在) 全ての a について $ab=a$ を満たす共通の実数 b がある.($b=1$ である.)
(ix) (積の逆元の存在) 0 でないどんな a についても $ab=1$ をみたす実数 b が (各 a ごとに) 存在する.($b=1/a$ とかく.)

また, $0 \neq 1$ であるので $\mathbb{R}$ は (可換) 体と呼ばれる.

2.3 順序と演算

実数における順序は

$$0 \leqq 1$$

が成り立つように決める. 今 $0 \neq 1$ であるので

$$0 < 1$$

である. また, 順序と演算にはつぎの 2 つの性質が成り立つ.

(i) $a \leqq b$ ならば $a+c \leqq b+c$
(ii) $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ ならば $ab \geqq 0$

この 2 つの性質よりいくつかの性質を導くことが出来る. 例えば, (i) より

$$0 \leqq a \Rightarrow 0+(-a) \leqq a+(-a)$$

であるので

(iii) $0 \leqq a$ ならば $-a \leqq 0$

が言えて, (iii) を用いると

$$a > 0, b \leqq 0 \Rightarrow a \geqq 0, -b \geqq 0 \Rightarrow -ab \geqq 0$$

だから $a > 0$ のとき $1/a \leqq 0$ だと仮定すると

$$-a(1/a) = -1 < 0$$

と矛盾が生じるので

(iv) $a > 0$ ならば $1/a > 0$

が成り立つことが分かる.

3　∞ は実数ではない

∞ が実数でないことを導くには, ∞ が実数だと仮定すると実数の性質が成り立たなくなることを言えば良い.

3.1　演算と順序の関係からの矛盾

∞ とは「無限大」と言うように限りなく大きいことを意味する記号である. すなわち

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ について } a \leqq \infty$$

が成り立たねばならない. (本当は「等号」は不要である) 今, 任意の実数 a について $0 \neq 1$ より $a \neq a+1$ が成り立ち, さらに $0 < 1$ であるので

$$a < a+1$$

が成り立つ.

∞ が実数だとすると $x = \infty + 1$ も実数であり

$$\infty < \infty + 1 = x$$

でなければならない. このことは

$$x \leqq \infty \quad \text{(無限大の性質)} \quad \text{かつ} \quad \infty < x$$

が成り立つことを意味し, 矛盾である. よって ∞ は実数ではない.

3.2　はさみうちの原理からの矛盾

実数の性質でよく使われる次の定理が成り立つ.

定理 (はさみうちの原理)**.** 3 つの実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ について十分大きなすべての n について

$$a_n \leqq c_n \leqq b_n$$

が成り立ち

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

ならば

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$$

が成り立つ.

このことから矛盾を導こう.

∞ とは先程と同様に

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ について } a \leqq \infty$$

という性質をもつとする．

$$0 < 1 \leqq \infty$$

が成り立つので ∞ が実数だと仮定すると $\infty > 0$ であり

$$\frac{1}{\infty} > 0$$

でなければならない．つまり

$$\frac{1}{\infty} \neq 0$$

である．∞ が実数だと仮定しているので $1/\infty$ も実数であり

$$c = \frac{1}{\infty} \neq 0$$

とおく．実数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を

$$a_n = 0, \qquad b_n = \frac{1}{n}, \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と決める．また実数列 $\{c_n\}$ を

$$c_n = c(\neq 0), \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と決めると

$$a_n \leqq c_n \leqq b_n$$

が成り立ち

$$0 = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

であるが

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c \neq 0$$

に矛盾する．よって ∞ は実数ではない．

3.3 $-\infty$ も実数ではない

$-\infty$ とは任意の実数よりも小さなものを意味する．先程と同様に $-\infty$ が実数だと仮定すると矛盾が生じることが言える．自分で考えてみると良い．また, ∞ や $-\infty$ の性質より

$$-\infty < 0 < \infty$$

つまり

$$-\infty \neq \infty$$

である．

3.4 $1/\infty$ も実数ではない

∞ が実数でないことは既に示したが $1/\infty$ も実数でないことを言っておく．

$1/\infty$ が実数であると仮定する．つまり

$$\infty \cdot \frac{1}{\infty} = 1$$

とする．このとき, 先程と同じ議論ではさみうちの原理を用いれば

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

に限る．ところが, $1/\infty = 0$ が実数なのだから 0 に逆元が存在することになる．これは矛盾である．よって, $1/\infty$ は実数ではない．

同様の議論で $1/(-\infty)$ も実数ではないことが言える．

3.5 拡大実数の考え方に関する注意

極限を理解しやすくする考え方に, $\mathbb{R}$ に $\{\infty, -\infty\}$ を付け加えた「拡大実数 (拡張実数)」の考え方がある．

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$$

と定義し, 拡大実数と呼ぶ．$\overline{\mathbb{R}}$ には四則演算を部分的に導入することができる (ここでは詳しく述べない).

$\overline{\mathbb{R}}$ における演算の例として, 任意の $a \in \mathbb{R}$ について

$$\frac{a}{\infty} = 0$$

がある．特に $a = 1$ の場合は

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

となる．この演算を実数の商演算と同じと思ってはいけない．また, この右辺の 0 は実数における 0 と等しくない．混乱の恐れのあるので, 記号を導入する．$\overline{\mathbb{R}}$ での演算における 0 を $\overline{0}$, $\mathbb{R}$ における 0 を $0_{\mathbb{R}}$ と記す．つまり

$$\overline{0} = \frac{a}{\infty} \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad 0_{\mathbb{R}} = 0 \in \mathbb{R}$$

とする．このとき,

$$\overline{0} \text{ と } 0_{\mathbb{R}} \text{ は等しくない}$$

ということである．演算に関する等式

$$\frac{a}{\infty} = \overline{0}$$

とは ∞ に発散する任意の極限 $\lim_{x \to c} f(x)$ について

$$\lim_{x \to c} \frac{a}{f(x)} = 0$$

となることを意味する形式的な演算と考えるべきである．したがって, $\overline{0}$ と $0_{\mathbb{R}}$ は厳密には等しくない．

4 まとめ

∞ が実数でないことの証明は他にもあるので自分で考えてみることを薦める．

∞ は実数ではないので自然数でもない．実数列は自然数から実数への写像であるので,

$$(\text{正しくない}) \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

の表現は良くない．もしこの表現が許されるなら

$$(\text{正しくない}) \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} = \frac{2}{\infty} = 0$$

も許されることになり

$$\frac{1}{\infty} = 0 = \frac{2}{\infty} \iff 1 = \infty \cdot 0 = 2$$

と矛盾した等式が成り立つことになる．関数の極限についても同様である．関数の引数に定義域の外の値を代入してはならない．

また数列が「 ∞ に収束する」の表現もおかしい．数列 $\{a_n\}$ について，n を限りなく大きくしたときに a_n が**実数** A に限りなく近づくときに限り「数列 $\{a_n\}$ は (A に) 収束する」というのだから実数でない ∞ に収束してはいけない．

実数の区間についても注意しておく．区間は実数の部分集合であるので ∞ や $-\infty$ を含める区間はおかしい．例えば

$$(\text{正しくない}) \qquad [-\infty, b], \qquad (a, \infty], \qquad [-\infty, \infty]$$

などは実数の部分集合でなくなるので注意すること．