行列の簡約化

立命館大学理工学部数学学修相談会

2015 年 9 月 7 日 *

概要

任意の行列 A は行列の行基本変形を繰り返し施すことにより, 唯一つの簡約行列 B に変形できる. この変形操作のことおよび得られた簡約行列 B を行列 A の簡約化という. ここでは, 任意の行列を確実に簡約化する方法を紹介する.

目次

1 簡約行列

次の 4 条件全てを満たす行列を**簡約行列**という.

(I) 零行ベクトルである行は, それ以外の行より下にある.

(II) 零行ベクトルでない行の主成分はすべて 1 である.

(III) 各行の主成分は下の行ほど右にある. すなわち, 第 i 行の主成分が, 左から ℓ_i 番目の成分だとすると $\ell_1 < \ell_2 < \cdots$ となる.

(IV) 各行の主成分を含む列において, その主成分以外の他の成分はすべて 0 である. すなわち, 第 i 行の主成分が左から ℓ 番目だとすると第 ℓ 列の上から i 番目の成分を除く全ての成分は 0 である.

ここで「零行ベクトル」とは全ての成分が 0 である行のこと. 「行の主成分」とは 0 でない最も左にある成分のことで, 零行ベクトルにおいては主成分は定義されない.

* 執筆 平岡由夫

簡約行列の例

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 行列の行基本変形

行列の次の 3 種の変形を**行列の行基本変形**という.

(I) 1 つの行を $c(\neq 0)$ 倍する.
(II) 2 つの行を入れ替える.
(III) 1 つの行に他の行の c 倍を加える.

2.1 行基本変形の記述

本テキストでは, 行列の行基本変形は以下のように記述する.

行　変形される行列の第 1 行, 第 2 行, $\cdots$ を①, ②, $\cdots$ と表記する.
行基本変形 (I) 「第 k 行を c 倍する」は "$ⓚ \times c$" と表記する.
行基本変形 (II) 「第 k 行と第 ℓ 行を入れ替える」は "$ⓚ \leftrightarrow ⓛ$" と表記する.
行基本変形 (III) 「第 k 行に第 ℓ 行の c 倍を加える」は "$ⓚ + ⓛ \times c$" と表記する.

行基本変形 (I) の例

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{① \times \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

行基本変形 (II) の例

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{① \leftrightarrow ②} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

行基本変形 (III) の例

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{③ + ① \times (-2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2 行基本変形 (II) について

行基本変形 (II) を除いて, 1 回の行基本変形で成分が変化するのは 1 行に限る. 実は, 行基本変形 (II) は, 行基本変形 (I) と (III) を繰り返すことにより実現されるので必要ではない.

行基本変形 (II) の 「第 k 行と第 ℓ 行を入れ替える」は次の順に行基本変形を施せば実現される.

(1) 第 k 行に第 ℓ 行を加える.(行基本変形 (III))
(2) 第 ℓ 行に第 k 行の -1 倍を加える.(行基本変形 (III))
(3) 第 ℓ 行を -1 倍する.(行基本変形 (I))
(4) 第 k 行に第 ℓ 行の -1 倍を加える.(行基本変形 (III))

具体的に行列
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$
の第 1 行と第 2 行を行基本変形 (II) を用いずに入れ替えてみる．
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{①+②} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{②+①\times(-1)} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{②\times(-1)} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{①+②\times(-1)} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

3　行列の簡約化

m 行からなる行列を確実に簡約化するには次の (1) から (4) を $k = 1, 2, \ldots, m$ について繰り返せばよい．

(1) 全ての成分が 0 である行はそうでない行より下になるように移動．(行基本変形 (II) を使う)
(2) 第 k 行以下で主成分が最も左にある行を第 k 行に移動．(行基本変形 (II) を使う)
(3) 第 k 行の主成分を 1 にする．(行基本変形 (I) を使うのが確実)
(4) 第 k 行の主成分のある第 ℓ 列について，第 k 行の c 倍を加える (行基本変形 (III)) により第 ℓ 列の k 番目以外の上下の成分をすべて 0 にする．

上記の方法で実際に行列を簡約化してみる．

$k = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & -4 & -7 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow[(1)]{①\leftrightarrow⑤} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 6 & 15 \\ 3 & 3 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & -4 & -7 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[(2)]{①\leftrightarrow②} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 15 \\ 2 & 2 & -1 & -4 & -7 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[(3)]{①\times\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 15 \\ 2 & 2 & -1 & -4 & -7 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[(4)]{③+①\times(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[(4)]{④+①} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$k = 2$ (1), (2) は完了している．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[(3)]{①\times\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[(4)]{③+②} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$k=3$ (2), (3) は不要.

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\xrightarrow[(1)]{\text{③}\leftrightarrow\text{④}}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[(4)]{\text{①}+\text{③}}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\xrightarrow[(4)]{\text{②}+\text{③}\times(-2)}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$k=4,\ k=5$ 完了している.

以上により

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & -4 & -7 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 15 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{簡約化}}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

である.

4　演習問題と解答

4.1　演習問題

与えられた行列を簡約化せよ.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$　(5) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　(6) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -6 \end{bmatrix}$

(7) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$　(8) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4.2 解答

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(7) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (8) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$