リーマン積分入門

立命館大学理工学部数学学修相談会

2015 年 9 月 16 日 *

概要

大学ではじめに習う「リーマン積分」は高校までに習ってきた積分とは定義が異なる．高校までに習った積分は一度忘れてしまい, 新たに学習するつもりで望むことが理解するための早道である．ここでは, 1 変数関数におけるリーマン積分の定義などの意味が, 教科書や講義での説明では理解できなかった者のために解説する．

目次

1 閉区間の分割

2 つの異なる実数 a, b $(a < b)$ をとる．このとき, 閉区間 $I = [a, b]$ を

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

を端点とする n 個の小閉区間

$$I_1 = [x_0, x_1], I_2 = [x_1, x_2], \ldots, I_n = [x_{n-1}, x_n]$$

に分けることを I の**分割**といい, I の分割を $\varDelta$ で表す．また, I の分割を構成する小区間の端点全体の集合

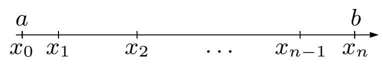
$$\{x_k\} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

* 執筆 平岡由夫

を I の**分点**という. I の分点 $\{x_k\}$ による分割が $\varDelta$ であるとき

$$\varDelta : \{x_k\}$$

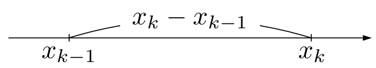
と表すことにする.



閉区間 $I=[a,b]$ の分割を $\varDelta : \{x_k\}$ とする. このとき, 各小区間 I_k $(k=1,2,\ldots,n)$ の長さは

$$x_k - x_{k-1} \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

となる.



これら n 個の長さの最大値を $|\varDelta|$ で表し, 分割 $\varDelta$ の**幅**と呼ぶ. すなわち

$$|\varDelta| = \max_{1\leqq k\leqq n}(x_k - x_{k-1})$$

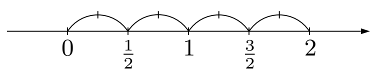
である.

例 閉区間 $I=[0,2]$ について, 5 個の分点による分割の幅の例を挙げる.

(1) $x_k = \dfrac{k}{2}$ $(k=0,1,2,3,4)$ で定まる $\{x_k\}$ を分点とする I の分割を $\varDelta$ とする. すなわち

$$\varDelta : \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$$

とする.



このとき

$$x_k - x_{k-1} = \frac{1}{2} \qquad (k=1,2,3,4)$$

であるので分割 $\varDelta$ の幅は

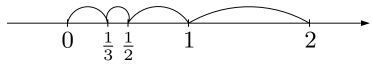
$$|\varDelta| = \max_{1\leqq k\leqq 4}(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{2}$$

となる. この例のように, 閉区間 I を長さが等しい n 個の閉区間に分割する分割のことを I の n **等分割**という.

(2) I の分割を

$$\varDelta : \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$$

とすると



分割 Δ の幅は

$$\begin{aligned}|\Delta| &= \max\left\{\frac{1}{3}-0, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{2}, 2-1\right\} \\ &= \max\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, 1\right\} \\ &= 1\end{aligned}$$

である.

上の例のように同じ閉区間でも, 分割の幅は一定ではないし, 特に分点の個数が同じでも分割の幅は一定ではない.

練習 $I = [0,2]$ とし, I の分割を

$$\Delta : \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, 2\right\}$$

としたとき, 分割の幅 $|\Delta|$ を求めよ.[*1]

2　リーマン和

閉区間 $I = [a,b]$ において定義され, I 上有界な関数 $f(x)$ について述べる. ここで $f(x)$ は閉区間 I において連続とは限らない. 以下で定義するように, 非連続な関数においても有界であればリーマン和は定義される.

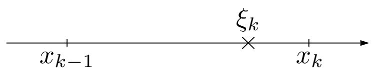
閉区間 I の分割 $\Delta : \{x_k\}$ によって生じる小区間

$$I_k = [x_{k-1}, x_k] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

のそれぞれから n 個の代表点 $\{\xi_k\}$:

$$\xi_k \in I_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

をとれば,

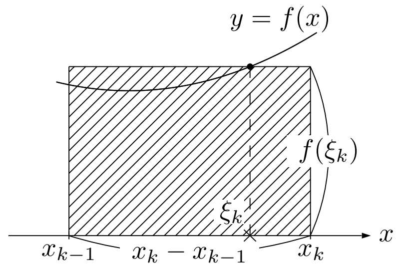


$f(x)$ が閉区間 I で有界であるので, 各小区間 I_k の長さ $x_k - x_{k-1}$ と $f(\xi_k)$ の積

$$f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

が定まる. $f(\xi_k) > 0$ ならば積 $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ とは下図の斜線部の長方形の面積である.

[*1] $|\Delta| = \sqrt{2} - \dfrac{1}{2}$ である.



ところが $f(\xi_k) < 0$ の時は積 $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ の値は負になり, 高校までで学んできたいわゆる「図形の面積」ではない. ($-f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ は長方形の面積になる.)

上述のように, 閉区間 I の分割 $\varDelta$, 代表点 $\{\xi_k\}$ を決めたときの積 $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ の総和を $\varDelta$, $\{\xi_k\}$ に関する f の**リーマン和**といって, $R(f, \varDelta, \{\xi_k\})$ で表す[*2]. すなわち

$$R(f, \varDelta, \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

である.

例 閉区間 $I = [0, 2]$ において有界な関数 $f(x) = 2x - 1$ に関するリーマン和の例を挙げておく.

(1) $x_k = \dfrac{k}{2}$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$ で定まる $\{x_k\}$ を分点とする I の分割を $\varDelta$ とする. すなわち

$$\varDelta : \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$$

とする.

(i) 各小区間の代表点 ξ_k をそれぞれの小区間の左端点, つまり

$$\xi_k = \frac{k-1}{2} \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

とすると $\{\xi_k\} = \left\{0, \dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{3}{2}\right\}$ であり, 今

$$x_k - x_{k-1} = \frac{1}{2} \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

である. よって, $\varDelta$, $\{\xi_k\}$ に関する f のリーマン和は

$$\begin{aligned} R(f, \varDelta, \{\xi_k\}) &= \sum_{k=1}^{4} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-1 + 0 + 1 + 2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

*2 リーマン和を $R(\varDelta, [a, b], f)$ と表記する本もあるが, この表記は正確ではないのでここでは使用を避ける.

である.

(ii) 各小区間の代表点 ξ_k をそれぞれの小区間の右端点, つまり

$$\xi_k = \frac{k}{2} \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

とすると $\{\xi_k\} = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ である. よって, Δ, $\{\xi_k\}$ に関する f のリーマン和は

$$\begin{aligned} R(f, \Delta, \{\xi_k\}) &= \sum_{k=1}^{4} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (0 + 1 + 2 + 3) \\ &= 3 \end{aligned}$$

である.

(iii) 各小区間の代表点 ξ_k を

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{4} \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \qquad & \xi_2 &= \frac{2}{3} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ \xi_3 &= \sqrt{2} \in \left[1, \frac{3}{2}\right], \qquad & \xi_4 &= 2 \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \end{aligned}$$

とすると, Δ, $\{\xi_k\}$ に関する f のリーマン和は

$$\begin{aligned} R(f, \Delta, \{\xi_k\}) &= \sum_{k=1}^{4} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + f(\sqrt{2}) + f(2) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + (2\sqrt{2} - 1) + 3 \right) \\ &= \frac{11}{12} + \sqrt{2} \end{aligned}$$

である.

(2) I の分点 $\{x_k\} = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$ による分割を

$$\Delta : \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$$

とし, 各小区間の代表点 ξ_k をそれぞれの小区間の左端点, つまり

$$\xi_1 = 0,\ \xi_2 = \frac{1}{3},\ \xi_3 = \frac{1}{2},\ \xi_4 = 1$$

とする. 今

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &= \frac{1}{3}, \qquad & x_2 - x_1 &= \frac{1}{6}, \\ x_3 - x_2 &= \frac{1}{2}, \qquad & x_4 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

である．よって，$\varDelta$, $\{\xi_k\}$ に関する f のリーマン和は

$$\begin{aligned}R(f,\varDelta,\{\xi_k\}) &= \sum_{k=1}^{4} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= f(0)\cdot\frac{1}{3} + f\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{6} + f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} + f(1)\cdot 1 \\ &= -1\cdot\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\right) + 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot 1 \\ &= \frac{11}{18}\end{aligned}$$

である．

上の例のように，分割 $\varDelta$, 代表点 $\{\xi_k\}$ の取り方は様々であり，その取り方によりリーマン和は値を変えうる．

練習

(1) $I=[0,2]$, $f(x)=2x-1$ とする．I の分割を

$$\varDelta : \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$$

とし，各小区間の代表点 ξ_k をそれぞれの小区間の右端点としたときのリーマン和 $R(f,\varDelta,\{\xi_k\})$ を求めよ．[*3]

(2) $I=[0,2]$, $f(x)=1$ とする．このとき I の分割 $\varDelta$, 代表点 $\{\xi_k\}$ の取り方によらず常に

$$R(f,\varDelta,\{\xi_k\}) = 2$$

が成り立つことを示せ．[*4]

3　リーマン積分

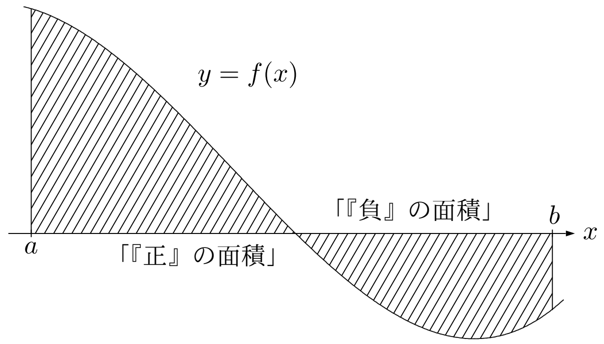
関数 $f(x)$ を閉区間 $I=[a,b]$ 上有界な関数とする．これから述べる $f(x)$ の I 上の定積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

とは xy 平面における $a \leqq x \leqq b$ の範囲の $y=f(x)$ と x 軸とに挟まれる点が構成する集合の「符号付きの面積」である．この「符号付き」とは x 軸より下にある部分は，「負の値を持つ面積」として考えることを意味する．高校までの数学で学習した常に正の値をもつ，いわゆる「図形の面積」ではない．

[*3] $R(f,\varDelta,\{\xi_k\}) = \dfrac{61}{18}$ である．

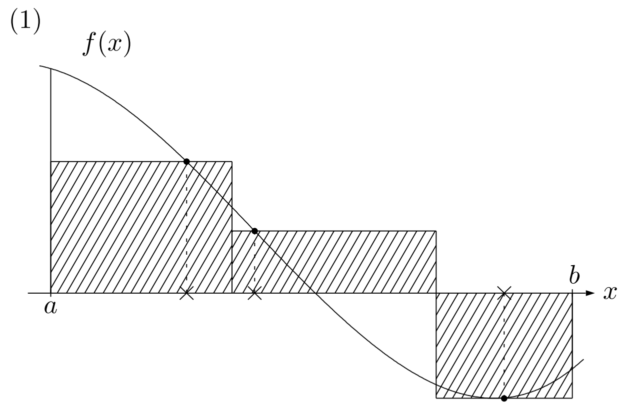
[*4] ヒント：任意の ξ_k について $f(\xi_k)=1$ である．

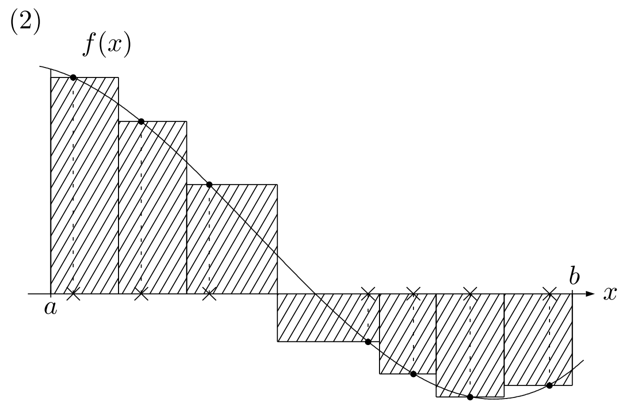


では, この「面積」をどのように決定するかといえば, リーマン積分においては分割を細かくして行くときのリーマン和の極限で定義するのである. もちろん, いつでも面積が決定するという保証はなく, 決定しない場合もある. 決定するときを「リーマン積分可能」とか「リーマン可積分」という.

3.1 アイデアと注意

まず始めに, $f(x)$ が与えられたとき, 2 種の分割と代表点から決定されるリーマン和を見てみよう.





見ての通り, (1) のリーマン和より (2) のリーマン和の方が分割が細かい (分割の幅 $|\Delta|$ が小さくなっている). さらに, (2) の方が定めたい面積に近いように思えるであろう. このように分割の幅をどんどん小さくしていっ

たときにリーマン和が収束するのかどうかを考察し, 収束したときはその極限値を「定めたい面積」として定義しようというのがリーマン積分である.

分割の幅 $|\varDelta|$ は正の実数であった. 任意の正の実数 $t(< b-a)$ について, $|\varDelta| = t$ を満たす分割 $\varDelta$ は**唯一つではない**が存在する. t を 0 に近づけていくことにより, $|\varDelta|$ が 0 に近づく (すなわち, 細かくなる) 分割を選ぶことが出来て, (代表点の取り方を決めておけば), リーマン和 (実数) の極限を考えることができる. ただし, 「細かくなる分割」や「代表点」の取り方ごとに, 無数の極限が考えられる. $f(x)$ は定まっているのに, それぞれの極限により, 様々な極限値を取り得ることや, 発散する可能性もあることに注意する必要がある.

3.2 定義

関数 $f(x)$ を閉区間 $I = [a, b]$ 上有界な関数とする. $\varDelta$ を限りなく細かくしていくとき, リーマン和 $R(f, \varDelta, \{\xi_k\})$ が一つの値 A に収束するとき, これを

$$\lim_{|\varDelta|\to 0} R(f, \varDelta, \{\xi_k\}) = A$$

と表す. 一般には, 閉区間 I の 分割 $\varDelta$ の取り方 (つまり, 分点 $\{x_k\}$ の取り方) , さらに, 小区間の代表点 $\{\xi_k\}$ の取り方によって異なる極限を考察しなければならない. このことに注意して, 次のように定義する.

定義 関数 $f(x)$ を閉区間 $I = [a, b]$ 上有界な関数とする. 閉区間 I の 分割 $\varDelta$ の取り方, さらに, 小区間の代表点 $\{\xi_k\}$ の取り方によらず全ての極限

$$\lim_{|\varDelta|\to 0} R(f, \varDelta, \{\xi_k\})$$

が同じ 1 つの値 A に収束するとき f は I 上で「**(リーマン) 積分可能**」あるいは「**(リーマン) 可積分**」であるという. また, このとき, 極限値 A を $f(x)$ の I 上の定積分いい,

$$\int_a^b f(x)dx$$

で表す. 定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ において, 閉区間 $[a, b]$ を**積分範囲**, $f(x)$ を**被積分関数**と呼ぶ.

注意 (1) 定積分の記法について注意しておく. 変数が x の関数 $f(x)$ については上記のように, 定積分を

$$\int_a^b f(x)dx$$

と記すが, 変数 t の関数 $f(t)$ については

$$\int_a^b f(t)dt$$

と記す.

(2) 細かくなる分割やそのときの代表点の取り方により, 極限が発散したり, 異なる値に収束するならば, f は I 上で (リーマン) 積分不可能である. 例えば $I = [0, 1]$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$$

のとき ($\mathbb{Q}$ は有理数全体の集合を意味する), 細かくなる分割をどのようにとっても, (i)「代表点 ξ_k を全て有理数にとる」, (ii)「代表点 ξ_k を全て無理数にとる」の 2 つの代表点の取り方が可能である. (i) の場合

$$\lim_{|\Delta|\to 0} R(f, \Delta, \{\xi_k\}) = 1$$

だが, (ii) の場合

$$\lim_{|\Delta|\to 0} R(f, \Delta, \{\xi_k\}) = 0$$

であるので異なる値に収束することが分かる. よって, この f は I 上 (リーマン) 積分不可能である.

練習 $f(x) = 1$ のとき, 閉区間 $[0, 2]$ において, あらゆる極限

$$\lim_{|\Delta|\to 0} R(f, \Delta, \{\xi_k\})$$

が同じ 1 つの値 2 に収束することを示し,

$$\int_0^2 f(x)dx = 2$$

であることを確かめよ.(定義にしたがって定積分の値を求めよということ.)

3.3 $\varepsilon - \delta$ 論法による定義

先ほどの定義をもう少し正確に定義すると

定義 f を閉区間 $I = [a, b]$ 上有界な関数とする. 任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対して $0 < |\Delta| < \delta$ を満たす分割 Δ, 任意の代表点 $\{\xi_k\}$ に対して

$$|R(f, \Delta, \{\xi_k\}) - A| < \varepsilon$$

となる δ が存在するとき, f は I 上 (リーマン) 積分可能という. また

$$\int_a^b f(x)dx = A$$

と決め, 関数 $f(x)$ の I 上の定積分という.

となる.

3.4 積分範囲の拡張

上述の定積分は $a < b$ のときに限る. そこで $a > b$ のときや $a = b$ のときも定積分を決めるために,

(1) $a > b$ のとき ($f(x)$ が $[b, a]$ で積分可能ならば)

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

(2) $a = b$ のとき

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$$

と定義する. 例えば (f が $[0,2]$ 上積分可能ならば)

$$\int_2^0 f(x)dx = -\int_0^2 f(x)dx, \qquad \int_2^2 f(x)dx = 0$$

である. また,

定理 実数 a, b, c について

$$\int_a^c f(x)dx,\ \int_a^b f(x)dx,\ \int_b^c f(x)dx$$

が値を持つならば

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

が成り立つ.(a, b, c の大小関係は影響しない)

4 連続関数の可積分性と微積分の基本定理

4.1 連続関数の可積分性

リーマン和は関数が連続でなくても定義されることは前に述べた. しかし, 閉区間で連続な関数には重要な性質が成り立つことが分かっている. ここでは証明を示さないが重要なのでしっかり覚えておくこと.

定理 (連続関数の可積分性) 関数 f が閉区間 $I=[a,b]$ で連続であるならば f は I 上積分可能である.

注意 関数 f が**閉**区間で連続であることが重要である.

さらに, この定理から次の定理が導かれる.

定理 f は閉区間 I 上の有界な関数であるとし, 閉区間 I 内の有限個の点を除いてすべて連続ならば, f は I 上積分可能である.

例えば

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x<1) \\ 1 & (1 \leqq x) \end{cases}$$

は $x=1$ で不連続だが 1 を含む閉区間 $[0,2]$ 上積分可能であり,

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 0dx + \int_1^2 1dx = 1$$

となる.

4.2 微積分の基本定理

例えば $f(x)=x^2$ は $\mathbb{R}$ 上連続であるので閉区間 $[0,1](\subset \mathbb{R})$ においても連続である. したがって, f は $[0,1]$ 上積分可能である. では,

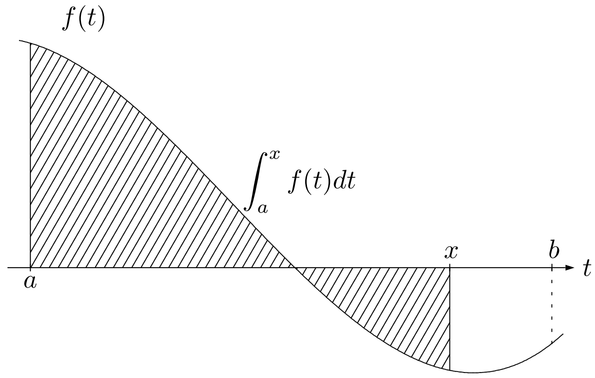
$$\int_0^1 x^2 dx$$

が求まるかというと, 定義にしたがって求めるのはほぼ不可能である. 実際に値を求める上での革命的な発見が次の定理である.

微積分の基本定理 関数 f が閉区間 $I=[a,b]$ 上連続であるならば

(1) $a \leqq x \leqq b$ で定義される関数

$$G(x)=\int_a^x f(t)dt$$



は I 上微分可能であり

$$\frac{d}{dx}G(x)=f(x)$$

が成り立つ.

(2) I において微分可能で, $\dfrac{d}{dx}F(x)=f(x)$ をみたす任意の関数 $F(x)$ について

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

が成り立つ.

一般に $F'(x)=f(x)$ を満たす関数 $F(x)$ は $f(x)$ の**原始関数**と呼ばれ, (1) は閉区間 I 上連続な関数には必ず原始関数が存在すること. (2) は原始関数を発見できれば定積分の値が求められることをいっている. また,

$$\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

と定義する. したがって, $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続である場合は, 高校までで学んだ定積分の値と一致する. 一例をあげると,

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2$$

であるので $\dfrac{1}{3}x^3$ は x^2 の原始関数である. よって

$$\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}\cdot 1^3-\frac{1}{3}\cdot 0^3=\frac{1}{3}$$

となる.

注意 原始関数が存在することが分かっていても, 具体的に発見できて, 定積分の値が上記の方法で計算できるとは限らない. 例えば e^{-x^2} は $\mathbb{R}$ で連続であるが原始関数を見つけることは困難である.

練習

(1) 定積分 $I = \displaystyle\int_{-2}^{1}(x^2 - 3x + 1)dx$ を求めよ.[*5]

(2) $\mathbb{R}$ で連続な関数

$$f(x) = \begin{cases} -x & (x < 0) \\ \sin x & (x \geqq 0) \end{cases}$$

の原始関数 $F(x)$ を見つけよ. [*6] ($\mathbb{R}$ 上 $F(x)$ が微分可能であり, $F'(x) = f(x)$ が成り立つことも確認せよ.) また, その原始関数を用いて定積分 $I = \displaystyle\int_{-1}^{\pi} f(x)dx$ を求めよ.[*7]

参考書籍

本文に登場する語句や, 記号は次の書籍を参考に執筆しました. ただし定義は微妙に異なります.

荒井正治　『理工系 微積分学 – 第 3 版 – 』 (学術図書出版社)

吹田信之・新保経彦　『理工系の微分積分学』 (学術図書出版社)

[*5] $I = \dfrac{7}{3}$ である.

[*6] 例えば $x < 0$ のとき $-\frac{1}{2}x^2 - 1$, $x \geqq 0$ のとき $-\cos x$ となる関数が $F(x)$ である.

[*7] $I = \dfrac{5}{2}$ である.