

# 記号と用語

立命館大学理工学部数学学修相談会

2016年1月20日\*

## 概要

数学を学修する前に知っておくべき記号や用語をまとめた。初学者用の内容。

## 1 定義, 公理, 命題, 定理など

論者や著者が主張したいことを様々な呼び名で分類し, 論理が鮮明になるように工夫することを数学では多用する。以下に, 代表的な呼び名を紹介する。

### 1.1 定義

「定義」とは議論を円滑に進める上で必要となる取り決めのことである。英語では definition という。一般に定義は議論を進行している環境により異なることがある。例えば, 教科書や論文, 分野や国により異なることがある。具体例として挙げておくと, 「自然数」とは日本の高校までの数学では「 $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ 」のように物の個数を表せる数であったが 0 を含めた集合を「自然数」とすることもあった。したがって「全ての自然数において」などの表現があった場合 0 を含めるのかどうかを注意しなければならない。他にもネピアの定数  $e$  の定義がある。高校数学の初期の段階では  $e$  を関数の極限

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad (1)$$

で定義する。ところが, 大学では  $e$  を数列の極限

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (2)$$

で定義することの方が多い。どちらで定義されているかで展開される議論が異なる。(1) で定義されていると「等式

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

が成り立つことを証明せよ。」という問題は成立しない。(そう定義しているのだから。) なお, 定義 (2) から等式 (1) を導くことは出来る。

「定義」することを明示するために冒頭に「**定義**」, 「**Definition**」, 「**Def.**」などと表記することが多いが, 「定義」は文中に埋まっていることも多い。例えば「 $f(x) = x^2$  とする」なども定義である。

---

\* 執筆 平岡由夫

## 1.2 公理

「公理」とは議論を進める上でどうしても必要な仮定となる主張である。公理は証明が明らかではないが、多くの者が真であると思われる主張を採用することが多い。例えばユークリッド幾何学における公理「任意の一点から他の一点に対して直線を引くことができる」は直観的には真であろうが、証明が出来ない。しかし、この主張を認めなければ以後の議論が進展しない。このようなときに「公理」として採用する。また、真であるとは言いつけない主張を採用することもある。例えば集合論における公理として「選択公理」と呼ばれるものがある。どちらも議論を進める上で必要である仮定であることが重要である。公理を真でないと思ふことから、新しい理論が生まれることもある。一連の公理の集まりを公理系と言う。

## 1.3 命題

数学でいう「命題」とは真偽が判定できる主張のことである。命題を英語では proposition という。例えば「 $1 + 1 = 2$  である」は真と、「 $0$  は奇数である」は偽であると判定でき、どちらも命題である。逆に「 $1$  である」や「 $x = 1$  である」はこのままでは真偽が判定できないので命題とは言えない。

## 1.4 定理・補題・系

議論に登場する命題の中で特に重要と思われる命題を「定理」、定理を説明する上で必要な命題を「補題」と呼ぶことがある。また、定理から自明な論理で導かれる命題を「系」と呼ぶこともある。英語において、「定理」は theorem, 「補題」は lemma, 「系」は corollary という。一般に、定理は真であると判定できる命題であるので、真であることを示すための証明が添えられることが多い。

## 1.5 原理

「原理」という言葉は現代では物理学における言葉であり、数学において使われることはない。ただし、「はさみうちの原理」や「アルキメデスの原理」など古くから知られている命題を原理と呼ぶこともある。物理学では、証明が出来ないが実験などでほぼ確かであろうと思われる主張を「原理」と呼ぶ。

## 2 数の集合を表す記号

数学で用いられる記号はギリシャ文字やアルファベットが元になっている場合が多い。ところが、文字の種類は限られているので、使用するフォント(書体)を換えたりすることで区別することがある。高校までの数学ではフォントにそれほど関心が無かったかもしれないが、例えば  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $R$ ,  $\mathcal{R}$  の 4 書体の  $\mathbb{R}$  はすべて異なるものとして扱う。印刷物においては  $\mathbb{R}$  ではなく  $\mathbf{R}$  (太字であることに注意) が使用されることが多い。

数学においては整数  $(\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots)$  全体の集合を表す記号として  $\mathbb{Z}$  を使い、 $\mathbb{Z}$  を整数環と呼ぶ。(分野によっては有理整数環と呼ぶこともある。) また、有理数全体の集合を表す記号として  $\mathbb{Q}$  を用いる。ここで有理数とは  $\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}$  などのいわゆる分数  $\left( = \frac{\text{整数}}{0 \text{ 以外の整数}} \right)$  と呼ばれる数である。 $\mathbb{Q}$  は有理数体(ゆうりすうたい)と呼ばれる。同様にして、実数全体の集合は  $\mathbb{R}$ 、複素数全体の集合は  $\mathbb{C}$  で表し、それぞれ、実数体、複素数体と呼ばれる。ここで「環」や「体(たい)」はある性質を持った集合を意味する言葉であり、整数集合のように「集合」と置き換えてもよい。

さらに、自然数全体の集合を  $\mathbb{N}$  で表すが、この集合に  $0$  が含まれるかどうかは人や書籍により異なる。

まとめておくと次の通り.

表記	意味	呼び方
$\mathbb{N}$ (または $\mathbf{N}$ )	自然数全体の集合	特にない
$\mathbb{Z}$ (または $\mathbf{Z}$ )	整数全体の集合	整数環
$\mathbb{Q}$ (または $\mathbf{Q}$ )	有理数全体の集合	有理数体
$\mathbb{R}$ (または $\mathbf{R}$ )	実数全体の集合	実数体
$\mathbb{C}$ (または $\mathbf{C}$ )	複素数全体の集合	複素数体

### 3 集合に関する用語と記号

現代数学において集合に関する理論「集合論」は非常に重要である. 何故なら, 現代数学の理論は「集合論」を基礎にして構成されているからである. 例えば, 高校までの数学では「自然数と自然数の和は自然数である」などと表現してきたが, 集合論を意識して同じことを表現すると

$$“\forall m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow m + n \in \mathbb{N}”$$

となる. また「自然数は整数である」は“ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ”となる. 高校までの数学と大きく違い, 現代の数学では考察している「物」がどんな集合の要素(=元(げん))であるかを常に意識する必要がある.

「量子力学」など現代の科学は数学を基礎にして理論が記述されており, 数学に限らず物理学や化学において集合の概念なしに理論を理解することは不可能である. ここでは集合論で必要となる記号の紹介をしておく.

#### 3.1 集合と元

数学的にはつきり識別できる条件に合うものを一まとめにしたものを「集合」ということにする. 集合  $S$  を構成する(数学的にはつきり識別できる条件に合う)「もの」それぞれを集合  $S$  の「元(げん)」という. 「元」は英語で element と言い, 高校までの数学で登場した「要素」と同意語である. 逆に言えば, 元を一まとめにしたものが集合である.

$a$  が集合  $S$  の元であること「元  $a$  は集合に属す」といい

$$a \in S$$

と表現する. “ $\in$ ” は  $e$  に対応するギリシャ文字 “ $\epsilon$ ” (「イプシロン」と発音し “ $\epsilon$ ” と同じ) が変形して出来た記号と考えられている. また, 元  $a$  が集合に属すとき「集合  $S$  は  $a$  を元に持つ」ということもあり,

$$S \ni a$$

と表現する. 微妙なニュアンスの違いがあるが同じ関係を意味する.

$a$  が集合  $S$  に属さないことを

$$a \notin S$$

や同じ意味で

$$S \not\ni a$$

と表現する. 例えば, 偶数全体の集合を  $S$  としたとき,

$$2, 6 \in S, \quad 3 \notin S$$

である. 元を 1 つも持たない集合を「空集合(くうしゅうごう)」といって

$$\emptyset$$

で表す. 記号 “ $\emptyset$ ” はギリシャ文字 “ $\phi$ ” (「ファイ」と発音し “ $\varphi$ ” と同じ) とよく似ているが別物である. まとめておくと次の通り.

表記	意味	呼び方
$a \in S$ または $S \ni a$	$a$ は $S$ の元である	$a$ は $S$ に属す
$a \notin S$ または $S \not\ni a$	$a$ は $S$ の元でない	$a$ は $S$ に属さない
$\emptyset$	元を持たない集合	空集合

### 3.2 包含関係

2つの集合  $S$  と  $T$  があって,  $S$  に属する全ての元が  $T$  に属するとき, 「集合  $S$  は集合  $T$  に含まれる」または「集合  $T$  は集合  $S$  を含む」といって,

$$“S \subset T” \text{ または } “T \supset S”$$

と表す. また, 集合  $S$  が  $S \subset T$  を満たすとき  $S$  を「 $T$  の部分集合」という. 例えば偶数全体の集合を  $S$  としたとき,

$$S \subset \mathbb{Z}$$

が成り立ち  $S$  は  $\mathbb{Z}$  の部分集合である.

また  $S$  が  $T$  の部分集合でないことを

$$“S \not\subset T” \text{ または } “T \not\supset S”$$

と表す.

2つの集合  $S$  と  $T$  があって,

$S$  と  $T$  は全く同じ元からなる集合であり「集合  $S$  と集合  $T$  は等しい」といって

$$S = T$$

と表す. 通常  $S$  が  $T$  の部分集合であると同時に  $T$  が  $S$  の部分集合であるとき, すなわち  $S \subset T$  かつ  $S \supset T$  のとき  $S = T$  と定義する. 定義より  $S = T$  ならば  $S \subset T$  が成り立つ (もちろん  $S \supset T$  も成り立つ). 説明するまでもないであろうが, 「集合  $S$  と集合  $T$  が等しくない」ことを

$$S \neq T$$

と表す.

ここで集合の考えを使う方が主張を明確に出来る例を一例紹介する. 「 $A$  は  $B$  である。」(英語では “ $A$  is  $B$ .”) は  $A$  と  $B$  が等しい「 $A=B$  である」ときにも同じ表現を使う. したがって「 $A$  は  $B$  である」だけでは「 $A$  と  $B$  は同じなんだ」という誤解を与えることがある. 「自然数は整数である」は正しいが「整数は自然数である」は正しくないので, 「自然数と整数は同じなんだ」という誤解を回避するためには「自然数は整数である」と主張するより, “ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ” と主張する方が良い. つまり, 自然数全体や整数全体の集合を考えて表現する方が, 誤解の少ない厳密な主張をしていることになる.

上述の例のように  $S \subset T$  であるが  $S \neq T$  が成り立つときに「 $S$  は  $T$  に真に含まれる」といって

$$“S \subsetneq T” \text{ または } “T \supsetneq S”$$

と表現する.  $S \subsetneq T$  のとき 集合  $S$  を「集合  $T$  の真の部分集合」という. 例えば  $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$  である. まとめておくと次の通り.

表記	意味	呼び方
$S \subset T$ または $T \supset S$	$S$ は $T$ の部分集合である	$S$ は $T$ に含まれる
$S \not\subset T$ または $T \not\supset S$	$S$ は $T$ の部分集合でない	$S$ は $T$ に含まれない
$S = T$	$S$ と $T$ が同じ集合	$S$ は $T$ と等しい
$S \neq T$	$S = T$ でない	$S$ は $T$ と異なる
$S \subsetneq T$ または $T \supsetneq S$	$S$ は $T$ の真の部分集合である	$S$ は $T$ に真に含まれる

### 3.3 集合を表現する記法

集合がどのような元から構成されているのかを明示するため元を“{ }”で括って記す. 例えば, 2 乗すると 4 になる集合を  $S$  としたとき  $S$  の元は  $-2$  と  $2$  だけであるので

$$S = \{-2, 2\}$$

と表現できる.  $S = \{-2, 2\}$  のとき  $T = \{2, -2\}$  とおくと  $S \subset T$  かつ  $S \supset T$  であるので  $S = T$ , すなわち

$$\{-2, 2\} = \{2, -2\}$$

が成り立ち, “{ }”の中の元の順番が異なっても同じ集合である. 同様に  $U = \{2, -2, -2, 2, -2\}$  としても  $U = S$  だから

$$\{2, -2, -2, 2, -2\} = \{-2, 2\}$$

つまり, 重複した元は 1 つと見なされる. したがって順番が定まり, 同じ値が繰り返し登場することもある, 数列, (例えば第  $n$  項が  $a_n$  である数列は  $\{a_n\}$  や

$$\{a_1, a_2, \dots\}$$

と表現される) は集合とよく似た表現であるがしっかりと区別しなければならない. この区別をつけるため第  $n$  項が  $a_n$  である数列を

$$(a_1, a_2, \dots)$$

と表現することもある.

先ほどと同じ, 「2 乗すると 4 になる実数」全体の集合  $S$  を, 具体的に元を明示せず, 元の性質のみを記述して

$$S = \{x \mid x^2 = 4, x \in \mathbb{R}\}$$

と表現することもある. “{ }”の中にある縦線“|”の左に記述してある元  $x$  の性質や条件が縦線の右に記述される. 縦線“|”は英語の“such that”に置き換えて  $x$  such that  $x^2 = 4$  and  $x \in \mathbb{R}$  の集合と読み取れば良い. 縦線の代わりに“;” (セミコロン) を使う場合もある.

なお,  $S = \{x \mid x^2 = 4, x \in \mathbb{R}\}$  について

$$S \subset \mathbb{R}$$

であること, つまり  $\mathbb{R}$  の部分集合であることは自明である. このようにどこの集合の部分集合であるかを見やすくするため  $\{x \mid x^2 = 4, x \in \mathbb{R}\}$  の表記ではなく

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 4\}$$

と表現することの方が多.

### 3.4 和集合・積集合・差集合

2つの集合  $S, T$  について,  $S$  の元または  $T$  の元となるような元全体の集合を「 $S$  と  $T$  の和集合」といって  $S \cup T$  と表す. つまり,

$$S \cup T = \{x \mid x \in S \text{ または } x \in T\}$$

である. 和集合は「合併集合」とも呼ばれる. また  $S$  の元かつ  $T$  の元となるような元全体の集合を「 $S$  と  $T$  の積集合」といって  $S \cap T$  と表す. つまり,

$$S \cap T = \{x \mid x \in S, x \in T\}$$

である. 積集合は「共通部分」とも呼ばれる. ここで, 記号 “ $\cup$ ”, “ $\cap$ ” はそれぞれ cup, cap と読む.

さらに  $S$  の元から  $T$  の元を取り除いた残りの元全体の集合を「 $S$  から  $T$  を引いた差集合」といって

$$S - T \text{ または } S \setminus T$$

と表す. つまり

$$S - T (\text{または } S \setminus T) = \{x \in S \mid x \notin T\}$$

である. どちらの表記も一長一短で, 分野によって使い分ける.

例を挙げておく.

$$S = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}, \quad T = \{3, 6, 9, 12, 15\}$$

のとき, 和集合と積集合はそれぞれ

$$S \cup T = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}, \quad S \cap T = \{6, 12\}$$

であり, 差集合については

$$S - T (\text{または } S \setminus T) = \{2, 4, 8, 10, 14\}, \quad T - S (\text{または } T \setminus S) = \{3, 9, 15\}$$

となる.

表記	意味	呼び方
$S \cup T$	$\{x \mid x \in S \text{ または } x \in T\}$	$S$ と $T$ の和集合 (または合併集合)
$S \cap T$	$\{x \mid x \in S, x \in T\}$	$S$ と $T$ の積集合 (または共通部分)
$S - T$ または $S \setminus T$	$\{x \in S \mid x \notin T\}$	$S$ から $T$ を引いた差集合

### 3.5 全体集合と補集合

集合を考える上で, その集合の元であるか否かは, 「数学的にはっきり識別できる条件に合うか否か」が判別できなければならない. これは暗黙のうちに, 「考察したい集合全てを, 部分集合として含む大きな集合」を考えていることに他ならない.

議論を進める上で対象となる全体を表す集合を「全体集合」または「普遍集合」という. 議論の対象によって全体集合は様々な集合になる. 例えば数の集合  $\mathbb{R}$  や  $\mathbb{C}$  を全体集合とすることもあれば, 確率論においては全ての事象を全体集合とすることもある.

全体集合を表す記号としてよく用いられるのがギリシャ文字  $\Omega$  (「オメガ」と発音する) である. ( $U$  または  $X$  を使用する場合もある.) 今, 全体集合を  $\Omega$  としておくと, 議論に登場する「もの」は全て  $\Omega$  に属す元で

あるし、登場する集合は  $\Omega$  の部分集合となる。つまり、「集合  $S$  について」という表現は  $\Omega$  の部分集合  $S$ , すなわち

$$S \subset \Omega$$

を満たす集合  $S$  を考えることになる。書籍などで全体集合を明示する場合は「集合論」を理解するための仮想的かつ便宜的な集合であることが多い。

全体集合を  $\Omega$  とする。集合  $S$  について  $S$  に属さない元全体の集合を  $S$  の「補集合」といい  $S^c$  または  $\bar{S}$  で表す。補集合は英語で compliment という。位相空間論などの分野によっては集合  $S$  の閉包 (closure) を  $\bar{S}$  で表すこともあり、そのことを意識した議論においては  $S$  の補集合は “ $S^c$ ” を用いることが多い。

$$S^c(\text{または } \bar{S}) = \{x \in \Omega \mid x \notin S\} = \Omega \setminus S$$

である。なお、分野によっては全体集合ではなく、「 $T$  における部分集合  $S$  の補集合」などの表現も存在し、この場合は

$$S^c(\text{または } \bar{S}) = \{x \in T \mid x \notin S\}$$

である。どこの補集合であるかは文脈で判断するしかない。

表記	意味	呼び方
$\Omega$ または $U$ または $X$	考察している元全体の集合	全体集合 (または普遍集合)
$S^c$ または $\bar{S}$	$S$ に属さない元全体の集合	$S$ の補集合

## 4 論理記号

論理記号は数学の議論を明確にしたり簡略化する目的で使用される。

### 4.1 $\forall$ と $\exists$

記号 “ $\forall$ ” は「任意の」を意味する記号であり、英語の any の頭文字 A が変形した記号である。特別な場合を除いて、「任意の」という言葉は「全ての」と同じであると解釈して良いが、厳密にはニュアンスが異なる。「任意の」にはいくつかある中から 1 つのものを選択して考察する意味があるが、1 つずつ考察することにより、「全て」を考察したことになる保証は実はどこにもない。これらが同じ考察であると認めるために、これらは同じ考察であると仮定して議論するので、違いを気にする必要はない。この記号 “ $\forall$ ” を使うと「任意の実数  $x, y$ 」は

$$\forall x, y \in \mathbb{R}$$

と表現できる。

記号 “ $\exists$ ” は「存在する」を意味する記号であり、英語の exist の頭文字 E が変形した記号である。また、この記号を用いるとき「～のような」の意味で “s.t. ～” を使うことがある。“s.t.” は英語の “such that” の略である。この記号を使うと「任意の正の実数  $a$  に対して  $0 < q < a$  を満たす有理数  $q$  が存在する」は

$$0 < \forall a \in \mathbb{R} \text{ に対して } \exists q \in \mathbb{Q} \text{ s.t. } 0 < q < a$$

と表現できる。

## 4.2 $\implies$ , $\impliedby$ , $\iff$

命題 P, Q があって「命題 P ならば命題 Q である」を

$$P \implies Q$$

と表現する。英語では “P only if Q” となる。このとき「P は Q の十分条件」または「Q は P の必要条件」である。例えば

$$x > 2 \implies x > 1$$

である。

逆に「命題 Q ならば命題 P である」を

$$P \impliedby Q$$

と表現する。英語では “P if Q” となる。このとき「P は Q の必要条件」または「Q は P の十分条件」である。さらに “ $P \implies Q$ ” と “ $P \impliedby Q$ ” のどちらも真であるとき、

$$P \iff Q$$

と表す。英語では “P if and only if Q” となる。“if and only if” は “iff” と略することがある。このとき「P と Q は必要十分」または「P と Q は同値」である。例えば

$$2x + 3 = x - 2 \iff x = -5$$

である。

## 5 記号や表記に関する注意

$\kappa$  と  $k$  は間違いやすい。 $\kappa$  はギリシャ文字で「カッパー」と呼ぶ。

$f(x)$  の導関数は  $f'(x)$  と記述する。これを  $f'(x)$  と書かない。 $f'(x)$  の “'” は「ダッシュ」, “'” は「アポストロフィ」と呼ばれ、違う記号である。通常、導関数には「ダッシュ」が使われる。

割り算を表す演算記号 “ $\div$ ” は大学数学ではあまり使用しない。分数形式で表現したり、“/” を用いることもある。例えば

$$\frac{\pi}{2} \quad \text{や} \quad \pi/2$$

など。

集合における「要素」という言葉も大学の数学では使わなくなる。代わりに「元(げん)」という。

演算の順序をあらわす中括弧 “{ }” や大括弧 “[ ]” を用いず

$$(3 + 2 - (4 - (-1)))$$

のように、丸括弧 “( )” のみを使用することもある。

ベクトル解析などの分野においては演算記号 “ $\times$ ” と “ $\cdot$ ” は別の意味で扱う。行列の積において、例えば行列  $A$  と  $B$  の積は  $AB$  と表現し、 $A \times B$  や  $A \cdot B$  などとは記述しない。スカラー倍も同様である。

また、前に述べたが文字の種類(フォント)を変えて別の変数として扱うことが多い。例えば  $\mathbf{b}$  と  $b$  は等しくない。見分けにくい文字、例えば “1”, “7”, “I(大文字のアイ)”, “l(小文字のエール)”, は見分けやすいように工夫する。例えば書体を変える。(“1” を “ℓ” と表記するなど。)



高校における数学では区別しなかった「不定積分」と「原始関数」は区別することがあり、分野によって定義が異なる。

集合の和集合  $S \cup T$  を  $S + T$  と表記しない。何故なら

$$S + T = \{s + t \mid s \in S, t \in T\}$$

の意味で使うことが多いからである。