関数の積と部分積分

立命館大学理工学部数学学修相談会

2016 年 5 月 28 日 *

概要

関数の積と, その微分公式から導かれる部分積分について説明する. 1 変数関数の積分において, 被積分関数の原始関数を見つけるのが困難な場合でも, 部分積分を用いることにより解決できることがある. 部分積分は関数の積と深く関連があり, どちらも重要である.

1 関数の積

1.1 関数の積

2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ が与えられたとき, それらの関数の積 $f(x)g(x)$ で新たな関数を作ることが出来る. 例えば $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$ のとき, 積 $f(x)g(x) = x \sin x$ は $f(x)$ でも $g(x)$ でもない新たな関数である.

1.2 関数の積への分解

2 つの関数が与えられたとき, それらの積から新しい関数を定義できるが, 逆に 1 つの関数が与えられたとき, その関数を 2 つの関数の積に分解し, 議論を進めることがよくある. 例えば $x \sin x$ は x と $\sin x$ の積と思える.

$\mathbb{R}$ を定義域とする $F(x) = x^3$ を 2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積に分解してみよう. 例えば $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ とすると $F(x) = f(x)g(x)$ となる. しかし, 分解は他にもある. 例えば $f(x) = 1$, $g(x) = x^3$ でも良いし, $f(x) = x^3 e^x$, $g(x) = e^{-x}$ なども考えられる. つまり, 積による分解は一通りではない. なお, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^4$ と分解するのは良くない. 何故なら, それらの積 $f(x)g(x)$ の定義域が $x \neq 0$ となり, $F(x)$ とは定義域が異なるから, $F(x) \neq f(x)g(x)$ となってしまうからである.

1.3 微分と積分に関する注意

関数 $F(x)$ が 2 つの関数の和で定義されているとき, つまり, $F(x) = f(x) + g(x)$ のとき, それらの導関数や積分については

$$F'(x) = f'(x) + g'(x)$$

や

$$\int F(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

* 執筆 平岡 由夫

が成り立った．ところが, 関数 $F(x)$ が 2 つの関数の積 $F(x) = f(x)g(x)$ で定義されているときは, 一般には導関数や積分については

$$F'(x) \neq f'(x)g'(x)$$

であるし,

$$\int F(x)\,dx \neq \left(\int f(x)\,dx\right)\left(\int g(x)\,dx\right)$$

である．

例えば $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ のとき,

$$f'(x) = 1, \qquad g'(x) = 2x$$

で $F(x) = f(x)g(x) = x^3$ とすると

$$F'(x) = 3x^2$$

であり,

$$F'(x) = 3x^2 \neq 2x = f'(x)g'(x)$$

であることが分かる．積分に関しても同様である (各自で確かめよ)．また, 積による分解のしかたで $f'(x)g'(x)$ は様々な関数になってしまう．つまり

$$f(x)g(x) = h(x)k(x)$$

が成り立っても, 一般には

$$f'(x)g'(x) \neq h'(x)k'(x)$$

である．

関数の積の微分や積分において, 以上のことは最も注意しなければならない．

2　関数の積の微分

前に述べたように, 一般には $\{f(x)g(x)\}' \neq f'(x)g'(x)$ であった．実は関数の積 $f(x)g(x)$ の導関数 $\{f(x)g(x)\}'$ は

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

となる．

2.1　関数の極限などの確認

点 a を含む区間 I で定義される関数 $f(x)$, $g(x)$ について, $x \to a$ のときどちらの関数も収束し,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x\to a} g(x) = \beta$$

であるならば $x \to a$ のとき $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ (ここで c_1, c_2 は定数) や 積 $f(x)g(x)$ も収束する．ここでは証明はしない．

補題 2.1. 点 a を含む区間 I で定義される関数 $f(x)$, $g(x)$ について, $x \to a$ のときどちらの関数も収束し,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x\to a} g(x) = \beta$$

であるならば $x \to a$ のとき $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ (ここで c_1, c_2 は定数) や 積 $f(x)g(x)$ も収束し,

$$\lim_{x \to a}\{c_1 f(x) + c_2 g(x)\} = c_1\alpha + c_2\beta$$

および

$$\lim_{x \to a}\{f(x)g(x)\} = \alpha\beta$$

が成り立つ.

したがって, $c_1(x)$, $c_2(x)$, $f(x)$, $g(x)$ がいずれも $x \to a$ のとき収束し,

$$\lim_{x \to a} c_1(x) = \alpha, \qquad \lim_{x \to a} c_2(x) = \beta$$

であるならば

$$\lim_{x \to a}\{c_1(x)f(x) + c_2(x)g(x)\} = \alpha \lim_{x \to a} f(x) + \beta \lim_{x \to a} g(x)$$

が成り立つ. また,

補題 2.2. 区間 I で微分可能な関数は I で連続となる.

が成り立つ.
なお $f(x)$ が $x = a$ で連続とは

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つことであり, これは

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$$

と同値である. また, 区間 I で $f(x)$ が連続とは任意の $a \in I$ について $f(x)$ が $x = a$ で連続であることを意味する. したがって, $f(x)$ が区間 I で微分可能なとき, 任意の $a \in I$ において

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a), \qquad \lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$$

が成り立つ.

2.2 微分可能性

まずはじめに, 区間 I を定義域とする関数 $f(x)$, $g(x)$ について, $A, B \in I$ において

$$\{f(A) - f(B)\}g(A) + f(B)\{g(A) - g(B)\} = f(A)g(A) - f(B)g(B)$$

が成り立つ. よって $F(x) = f(x)g(x)$ で $A = a + h$, $B = a$ のとき

$$F(a+h) - F(a) = \{f(a+h) - f(a)\}g(a+h) + f(a)\{g(a+h) - g(a)\}$$

である.

定理 2.3. 区間 I で微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$ について, $F(x) = f(x)g(x)$ も I で微分可能であり, $x = a (\in I)$ における微分係数 $F'(a)$ は

$$F'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

である.

(証明) $f(x)$, $g(x)$ は任意の $a \in I$ において微分可能なので,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

また, $a \in I$ において連続でもあるので

$$\lim_{h \to 0} g(a+h) = g(a)$$

が成り立つことに注意する.

任意の $a \in I$ について $h \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} &= \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} \\ &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot g(a+h) + f(a) \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \end{aligned}$$

であるので $h \to 0$ のときの極限を考えると $F(x)$ は $x = a$ で微分可能であり,

$$F'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

を得る □

2.3 導関数

前節の定理 2.3 により, 導関数については次の定理が成り立つ.

定理 2.4 (関数の積の微分公式)**.** 区間 I で微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$ について, $F(x) = f(x)g(x)$ の導関数 $F'(x)$ は

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad (x \in I)$$

つまり

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad (x \in I)$$

である.

例 2.1. $F(x) = x^3$ のとき, $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ のとき $F(x) = f(x)g(x)$ であるが, このとき

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x = 3x^2 = F'(x)$$

である.

例 2.2. $f(x) = c$ (c は定数), $g(x)$ が微分可能のとき, $F(x) = f(x)g(x) = cg(x)$ の導関数を考えれば

$$\{cg(x)\}' = \{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = cg'(x)$$

を得る.

例 2.3. $n = 1, 2, 3, \ldots$ について $F_n(x) = x^n$ とおくと $F_n'(x) = nx^{n-1}$ である. つまり,

$$\{x^n\}' = nx^{n-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

が成り立つ.

数学的帰納法で示すことが出来る．まず, $n = 1$ のときは $\{F_1(x)\}' = (x)' = 1$ であり成立する．また, $n = k$ のとき, $F_k'(x) = kx^{k-1}$ が成り立つと仮定すると $F_{k+1}(x) = x^k \cdot x = F_k(x) \cdot x$ だから

$$F_{k+1}'(x) = F_k'(x) \cdot x + F_k(x) \cdot (x)' = kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = (k+1)x^k$$

で $n = k+1$ についても成立するからである．

例 2.4. $n = 1, 2, 3, \dots$ について $F_n(x) = \sin^n x$ とおくと $F_n'(x) = n \sin^{n-1} x \cdot \cos x$ である．つまり,

$$\{\sin^n x\}' = n \sin^{n-1} x \cdot \cos x \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つ．

合成関数の微分を使っても示すことが可能であるが, 定理 2.4 を用いて, 数学的帰納法で示す．$n = 1$ のときは $\{F_1(x)\}' = (\sin x)' = \cos x = 1 \cdot \sin^0 x \cdot \cos x$ であり成立する．また, $n = k$ のとき, $F_k'(x) = k \sin^{k-1} x \cos x$ が成り立つと仮定すると $F_{k+1}(x) = \sin^k x \cdot \sin x = F_k(x) \cdot \sin x$ だから

$$\begin{aligned}
F_{k+1}'(x) &= F_k'(x) \cdot \sin x + F_k(x) \cdot (\sin x)' \\
&= (k \sin^{k-1} x \cdot \cos x) \sin x + \sin^k x \cdot \cos x \\
&= k \sin^k x \cdot \cos x + \sin^k x \cdot \cos x \\
&= (k+1) \sin^k x \cdot \cos x
\end{aligned}$$

で $n = k+1$ についても成立するからである．

例 2.5. $g(x) \neq 0$ のとき $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ とおくと,

$$f(x) = g(x)h(x)$$

であるので, 定理 2.4 を用いて

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = \frac{f(x)g'(x)}{g(x)} + g(x)h'(x)$$

すなわち

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

を得る．これは

$$\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \qquad \text{(関数の商の微分公式)}$$

を意味する．

2.4　練習問題

1. 次の関数を微分して導関数を求めよ．
   (1) $f(x) = (x^2 + 3x - 5)(2x^3 + 1)$
   (2) $f(x) = x^2 \sin x$
   (3) $f(x) = e^x \cos x$

2. 微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ について

$$\{f(x)g(x)h(x)\}' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

が成り立つことを定理 2.4 を用いて示せ.

3. 定理 2.4 を用いて

$$\{\cos^n x\}' = -n\cos^{n-1} x \cdot \sin x \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを示せ. なお $(\cos x)' = -\sin x$ は成り立つとする.

4. 定理 2.4 を用いて

$$\{e^{nx}\}' = ne^{nx} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを示せ. なお $(e^x)' = e^x$ は成り立つとする.

3 部分積分

部分積分は関数の積の微分公式から導かれる. 容易に原始関数を見つけることが出来ないときでも, 部分積分を利用することによって, 与えられた関数の原始関数を見つけることが可能になることがある.

3.1 原始関数と不定積分の確認

一般に, $F'(x) = f(x)$ をみたす関数 $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**[*1]という.

例 3.1. $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ は $f(x) = x$ の原始関数である.

例 3.2. $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 3$ も $f(x) = x$ の原始関数である.

例 3.3. $F(x) = \sin x$ は $f(x) = \cos x$ の原始関数である.

例 3.4. $F(x) = -\cos x$ は $f(x) = \sin x$ の原始関数である.

例 3.5. $x \neq 0$ において $F(x) = \log|x|$ は $f(x) = \dfrac{1}{x}$ の原始関数である.

例 3.1, 3.2 で分かるように, 原始関数は唯一つではない. $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるならば, 任意の定数 C について

$$F(x) + C$$

も $f(x)$ の原始関数となり, 逆に, $F(x)$ と $G(x)$ がともに $f(x)$ の原始関数であるとき,

$$G(x) = F(x) + C$$

をみたす定数 C が存在する. $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数のとき, $F(x) + C$ は $f(x)$ の**不定積分**[*2]とよばれ, $\displaystyle\int f(x)\,dx$ と記す. すなわち

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

である. また, この定数 C のことを**積分定数**という.

[*1] これを不定積分ということもある.

[*2] 定積分を用いた定義もある. また, これを原始関数ということもある.

例 3.6. 例 3.1 より

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

である.

例 3.7. 例 3.2 より

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 3 + C$$

でもある.

一般に, 任意の定数 c について

$$\int f(x)\,dx + c = \int f(x)\,dx$$

が成り立つ. 以上のことに注意すれば, 導関数の性質より

補題 3.1. 次の (1),(2) が成り立つ.

(1) $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ (k は定数)

(2) $\displaystyle\int \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

を得る.

3.2 不定積分の部分積分

関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積 $f(x)g(x)$ の導関数について

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

が成り立った. すなわち

$$H(x) = f(x)g(x), \qquad h(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

とおくと $H'(x) = h(x)$ であるので, $H(x)$ は $h(x)$ の原始関数であり,

$$\int h(x)\,dx = H(x) + C$$

である. 左辺については

$$\int h(x)\,dx = \int \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

であるので, 等式

$$\int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) + C$$

が成り立つことと同値である. したがって, 原始関数の存在についても考慮すれば, 次の定理を得る.

定理 3.2 (不定積分の部分積分)**.** $f(x)$, $g(x)$ が共に C^1 級であるとき

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

が成り立つ.

ここで, 関数 $f(x)$ が C^1 級であるとは $f(x)$ が微分可能であり, さらに, その導関数 $f'(x)$ も連続であることを意味する.

この定理は, 与えられた不定積分が $\displaystyle\int f'(x)g(x)\,dx$ と見なせるならば, $\displaystyle\int f(x)g'(x)\,dx$ の計算へ帰着させることが可能であることを意味する.

例 3.8. $f(x) = x$ で定理を用いれば

$$\int g(x)\,dx = xg(x) - \int xg'(x)\,dx$$

である.

例 3.9. $I = \displaystyle\int xe^x\,dx$ を求める.

$f(x) = e^x$, $g(x) = x$ とおく. このとき, $f'(x) = e^x$, $g'(x) = 1$ である. したがって

$$\begin{aligned} I = \int xe^x\,dx &= \int f'(x)g(x)\,dx \\ &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx \\ &= xe^x - \int e^x \cdot 1\,dx \\ &= (x-1)e^x + C \end{aligned}$$

を得る.

例 3.10. $x \neq 0$ のときの $I = \displaystyle\int \log|x|\,dx$ を求める.

$f(x) = x$, $g(x) = \log|x|$ とおく. このとき, $f'(x)g(x) = \log|x|$, $f(x)g'(x) = 1$ である. したがって

$$\begin{aligned} I = \int \log|x|\,dx &= \int f'(x)g(x)\,dx \\ &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx \\ &= x\log|x| - \int\,dx \\ &= x\log|x| - x + C \end{aligned}$$

を得る.

例 3.11. $k(\neq 0)$ が定数のとき

$$I_1 = \int e^{kx}\sin x\,dx, \qquad I_2 = \int e^{kx}\cos x\,dx$$

を求める.

$f(x) = \dfrac{e^{kx}}{k}$, $g(x) = \sin x$ とおけば, $f'(x)g(x) = e^{kx}\sin x$, $f(x)g'(x) = \dfrac{1}{k}e^{kx}\cos x$ であるので, 部分積分を用いて

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{e^{kx}\sin x}{k} - \frac{1}{k}\int e^{kx}\cos x\,dx \\ &= \frac{1}{k}\left(e^{kx}\sin x - I_2\right) \end{aligned}$$

を得る．同様にして I_2 においても部分積分を行うと

$$I_2 = \frac{1}{k}\left(e^{kx}\cos x + I_1\right)$$

を得る．以上により

$$kI_1 + I_2 = e^{kx}\sin x, \qquad I_1 - kI_2 = -e^{kx}\cos x$$

が成り立つので, これらより

$$I_1 = \frac{e^{kx}}{k^2+1}(k\sin x - \cos x) + C, \quad I_2 = \frac{e^{kx}}{k^2+1}(k\cos x + \sin x) + C$$

を得る．

3.3 練習問題

1. 次の不定積分を求めよ．
   (1) $\displaystyle\int x^2 e^x\, dx$
   (2) $\displaystyle\int x^2 \log|x|\, dx\ (x \neq 0)$
   (3) $\displaystyle\int \tan^{-1} x\, dx$ (ヒント $(\{\log(1+x^2)\}' = \dfrac{2x}{1+x^2}$ である.)
2. $I_1 = \displaystyle\int e^{ax}\sin bx\, dx$, $I_2 = \displaystyle\int e^{ax}\cos bx\, dx\ (a \neq 0)$ を求めよ．
3. $m = 1, 2, 3, \ldots$ について $I_m = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+A)^m}\ (A \neq 0)$ とおく．I_{m-1} を部分積分することにより, 漸化式

$$I_m = \frac{1}{2A(m-1)}\left\{\frac{x}{(x^2+A)^{m-1}} + (2m-3)I_{m-1}\right\} \qquad (m = 2, 3, 4, \ldots)$$

   が成り立つことを示せ．

3.4 定積分の部分積分

まずは簡単に復習をしておく．補題 3.1 と同様に定積分に関しても以下の補題が成り立つ．ただし, 不定積分のときと異なり, 証明にはリーマン積分の定義を必要とするのでここでは省略する．

補題 3.3. k を定数とし, $f(x)$, $g(x)$ が共に閉区間 $[a, b]$ で積分可能であるとき, $kf(x)$, $f(x) + g(x)$ も $[a, b]$ で積分可能であり,

(1) $\displaystyle\int_a^b kf(x)\, dx = k\int_a^b f(x)\, dx$ (k は定数)

(2) $\displaystyle\int_a^b \{f(x) + g(x)\}\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$

である．

定理 3.4 (定積分における平均値の定理)**.** 閉区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ において

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = f(c), \\ a \leqq c \leqq b \end{array}\right.$$

をみたす c が存在する.

(証明) 仮定より $f(x)$ は閉区間 $I=[a,b]$ で連続であるので I における最大値 M, および最小値 m が存在する. 今, $f(c_1)=m$, $f(c_2)=M$ $(c_1,c_2 \in I)$ としておく. このとき, $m \leqq f(x) \leqq M$ であるので

$$\int_a^b m\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b M\,dx$$

であり, リーマン積分の定義により $\displaystyle\int_a^b m\,dx = m(b-a)$, $\displaystyle\int_a^b M\,dx = M(b-a)$ であるので

$$m \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqq M$$

を得る. $c_0 \leqq x \leqq c_1$ または $c_1 \leqq x \leqq c_0$ において中間値の定理を用いれば

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

をみたす定数 c が c_0 と c_1 の間 (つまり $a \leqq c \leqq b$) に存在するので, 定理は示された □

以上の補題と定理はどちらもリーマン積分の定義まで戻らないと証明できないことに注意が必要である. 特に, 高校で習う数学では定積分の定義がリーマン積分の定義とは異なるので, 改めて証明する必要がある. また, これらの補題, 定理から以下の定理が得られる.

定理 3.5 (微分積分学の基本定理)**.** 関数 $f(x)$ をある区間 I で連続な関数とする. $f(x)$ の原始関数の 1 つを $G(x)$ とし, $a,b \in I$ とする. このとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \big[G(x)\big]_a^b = G(b)-G(a)$$

である.

(証明) $a=b$ のときは自明である. $a<b$ のとき閉区間 $[a,b]$ ($a>b$ のときは閉区間 $[b,a]$) を定義域とする関数 $F(x)$ を

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

と定義する. このとき

$$F(a)=0, \qquad F(b)=\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$$

である.

次に $F'(x)=f(x)$ を示す. $h>0$ のとき任意の $c \in [a,b]$ において

$$\begin{aligned}\frac{F(c+h)-F(c)}{h} &= \frac{1}{h}\left\{\int_a^{c+h} f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt\right\} \\ &= \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)\,dt\end{aligned}$$

ここで, 定理 3.4 を用いれば

$$\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)\,dt = f(\xi), \qquad c \leqq \xi \leqq c+h$$

をみたす ξ が存在し, $h \to 0$ のとき $\xi \to c$ であるので $h < 0$ のときも合わせて考察すると

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = \lim_{\xi \to c} f(\xi) = f(c)$$

となり, $c \in [a, b]$ において $F'(c) = f(c)$ (つまり, $F'(x) = f(x)$) が成り立つ.

以上により $f(x)$ の任意の原始関数 $G(x)$ は定数 C を用いて

$$G(x) = F(x) + C$$

と表され,

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= \{F(b) + C\} - \{F(a) + C\} \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x)\, dx \end{aligned}$$

を得る □

この定理を, 関数の積に用いることで以下の定理を得る.

定理 3.6 (定積分の部分積分)**.** $f(x)$, $g(x)$ がある区間 I で C^1 級であるとき, $a, b \in I$ において

$$\int_a^b f'(x)g(x)\, dx = \big[f(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\, dx$$

が成り立つ.

(証明) $H(x) = f(x)g(x)$, $h(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ とおくと $H'(x) = h(x)$ が成り立つので, $H(x)$ は $h(x)$ の原始関数の 1 つである. したがって, 定理 3.5 より

$$\int_a^b h(x)\, dx = \big[H(x)\big]_a^b = \big[f(x)g(x)\big]_a^b$$

が成り立つ. また, 補題 3.3 より

$$\int_a^b h(x)\, dx = \int_a^b \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}\, dx = \int_a^b f'(x)g(x)\, dx + \int_a^b f(x)g'(x)\, dx$$

であるので

$$\int_a^b f'(x)g(x)\, dx + \int_a^b f(x)g'(x)\, dx = \big[f(x)g(x)\big]_a^b$$

となる. すなわち

$$\int_a^b f'(x)g(x)\, dx = \big[f(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\, dx$$

を得る □

例 3.12. 周期関数などのように, $f(x)$, $g(x)$ が $f(a) = f(b)$ かつ $g(a) = g(b)$ をみたすなら

$$\int_a^b f'(x)g(x)\, dx = -\int_a^b f(x)g'(x)\, dx$$

が成り立つ.

例 3.13. $I = \displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$ を求める．
　$f(x) = e^x$, $g(x) = x$ とおく．このとき，$f'(x) = e^x$, $g'(x) = 1$ である．したがって

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 xe^x\,dx &= \int_0^1 f'(x)g(x)\,dx \\ &= \big[f(x)g(x)\big]_0^1 - \int_0^1 f(x)g'(x)\,dx \\ &= \big[xe^x\big]_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot 1\,dx \\ &= (e-0) - \big[e^x\big]_0^1 \\ &= e - (e-1) = 1 \end{aligned}$$

を得る．

例 3.14. $x \neq 0$ のときの $I = \displaystyle\int_{-e}^{-1} \log|x|\,dx$ を求める．
　$f(x) = x$, $g(x) = \log|x|$ とおく．このとき，$f'(x)g(x) = \log|x|$, $f(x)g'(x) = 1$ である．したがって

$$\begin{aligned} I = \int_{-e}^{-1} \log|x|\,dx &= \int_{-e}^{-1} f'(x)g(x)\,dx \\ &= \big[f(x)g(x)\big]_{-e}^{-1} - \int_{-e}^{-1} f(x)g'(x)\,dx \\ &= \big[x\log|x|\big]_{-e}^{-1} - \int_{-e}^{-1} dx \\ &= -1\log|-1| + e\log|-e| - \{(-1)-(-e)\} \\ &= e - (-1+e) = 1 \end{aligned}$$

を得る．

例 3.15. $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ を求める．
　$n = 0$ のときは

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

であり，$n = 1$ のときは

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^1 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \big[-\cos x\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

である．$n \geqq 2$ については部分積分を用いる．

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^{n-1} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)' \sin^{n-1} x\,dx \\ &= \big[-\cos x \sin^{n-1} x\big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (\sin^{n-1} x)'\,dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x\,dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x\,dx \\ &= (n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx\right) \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

したがって

$$I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n) \iff nI_n = (n-1)I_{n-2}$$

より

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad (n \geqq 2)$$

を得る. 例えば

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx &= I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}, \\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx &= I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}, \\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx &= I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0 = \frac{3\pi}{16}, \\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \, dx &= I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1 = \frac{8}{15}
\end{aligned}$$

であり, 一般の $n \geqq 2$ については

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (n \text{ が偶数}) \\[2ex] \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{2}{3} \cdot 1 & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

が求まる. 自然数 n について

$$n!! = \begin{cases} n \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 4 \cdot 2 & (n \text{ が偶数}) \\ n \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 1 & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

とし, $0!! = 1$, $(-1)!! = 1$ と決める (例えば $1!! = 1$, $2!! = 2$, $3!! = 3$, $4!! = 8$, $5!! = 15$ である). この記号を用いれば $n = 0, 1, 2, \ldots$ について

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (n \text{ が偶数}) \\[2ex] \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

と表すことも出来る.

被積分関数が関数の積であるからといって, いつでも部分積分により計算が可能になるわけではない. 例えば

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x^2 \, dx$$

などは, 部分積分で計算が出来そうだが難しい. ちなみに $I = 0$ である. 各自で考えよ.

3.5 練習問題

1. 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x \, dx$

(3) $\displaystyle\int_1^e x^2 \log x \, dx$

2. 部分積分を用いて, 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (x+1)(x-2) \, dx$

(2) $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) \, dx$ (α, β は定数)

3. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \, dx$, $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx$ とする.

(1) I を部分積分することにより, $I + J = e^{\frac{\pi}{2}}$ を示せ.

(2) J を部分積分することにより, $I - J$ を求めよ.

(3) I, J を求めよ.

4. 部分積分を用いて, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ を求めよ.

参考書籍

本文に登場する語句, 記号, 問題は次の書籍を参考にした.

荒井正治	『理工系 微積分学 – 第 3 版 – 』	(学術図書出版社)
笠原晧司	『微分積分学』	(サイエンス社)
下村宏彰 · 三上俊介	『新装版 微分積分学』	(学術図書出版)
吹田信之 · 新保経彦	『理工系の微分積分学』	(学術図書出版社)

練習問題解答

2.4

1. (1) $f'(x) = (2x+3)(2x^3+1) + 6x^2(x^2+3x-5)$
   (2) $f'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x$
   (3) $f'(x) = e^x(\cos x - \sin x)$
2. $f(x)g(x)h(x) = \{f(x)g(x)\}h(x)$ と思えば良い.

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \{f(x)g(x)h(x)\}' \\ &= \{f(x)g(x)\}'h(x) + \{f(x)g(x)\}h'(x) \\ &= \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x) = (\text{右辺})\end{aligned}$$

3. 略
4. 略

3.3

1. (1) $e^x(x^2-2x+2)+C$
   (2) $\dfrac{1}{9}x^3(3\log|x|+1)+C$
   (3) $x\tan^{-1}x\dfrac{1}{2}\log(x^2+1)+C$
2. $aI_1 + bI_2 = e^{ax}\sin bx$, $bI_1 - aI_2 = -e^{ax}\cos bx$ より

$$I_1 = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx), \quad I_2 = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$$

3. 部分積分を用いると

$$I_{m-1} = \frac{x}{(x^2+A)^{m-1}} + 2(m-1)I_{m-1} - 2(m-1)AI_m$$

   を得る. これを I_m について解けば良い.

3.5

1. (1) π (2) $e-2$ (3) $\dfrac{1}{9}(2e^3+1)$
2. (1) $-\dfrac{2}{9}$ (2) $-\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{6}$
3. (1) 略 (2) 1 (3) $I = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$, $J = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$
4. 略