数列の極限 (ε-δ 論法入門 2)

立命館大学理工学部数学学修相談会

2018 年 1 月 9 日 *

概要

数列の極限に関する定理を紹介する．ここで登場する定理の多くは高校で公式として習ったものであるので, 大学の数学の講義では省略することが多い．しかし, 高校数学の範囲での定理の証明は不充分であることが多く, 本来は, ε-δ 論法に慣れるためにも証明をしておくことが望ましい．自分で証明をすることは困難である場合もあるので, 教科書などでは省略してある証明も紹介しておく．じっくり読んで, 一度は理解して置くことが大事である．

具体的には, 実数列の極限の性質を ε-δ 論法における定義から導く．ただし, 細かな考察をする際に, 実数の連続性を無視するわけにはいかなくなる．そこで, (具体的な定義は紹介しないが) $\mathbb{Q}$ の絶対値による完備化を $\mathbb{R}$ として*1話を進めていく．

目次

1 **はじめに** 2

2 **極限値の一意性** 3

3 **極限の性質** 4
- 3.1 有界な数列 4
- 3.2 和差積商の極限 5
- 3.3 部分列 10
- 3.4 大小関係とはさみうちの原理 12
- 3.5 $\sqrt{a_n}$ の極限 13
- 3.6 単調な数列 14
- 3.7 有名な極限の問題 17

4 **補足** 17
- 4.1 稠密性 18
- 4.2 アルキメデスの原理 19
- 4.3 コーシー列と完備性 21

* 執筆 平岡由夫

*1 大雑把に言えば, 番号が大きくなると項の変化が限りなく小さくなる「いかにも収束しそうな」有理数列がすべて収束するように「上手く」拡大した集合を $\mathbb{R}$ とすること．

1 はじめに

自然数全体の集合を $\mathbb{N}$, 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$, 有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$, 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と記す. 数学の解析学などの専門書においては, 0 を自然数に含めることがあるが, ここでは 0 は自然数に含めないことにする.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

数列 $\{a_n\}$ において, その極限の収束については

定義 1.1.

$$\begin{aligned}&\text{数列 } \{a_n\} \text{ が } \alpha \in \mathbb{R} \text{ に収束する}\\ &\quad \overset{\text{def}}{\iff} \forall\varepsilon > 0 \text{ について } \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } |a_n - \alpha| < \varepsilon \quad (n \geqq N)\end{aligned}$$

と定義し, 実数列 $\{a_n\}$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するとき, α を数列の極限値といい,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

または

$$a_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$$

と記す. 例えば $a_n = c$ (定数) のとき $\forall\varepsilon(> 0)$ について, $|a_n - c| = 0 < \varepsilon$ $(\forall n)$ が成り立つので

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c \qquad (c \text{ は定数})$$

である. さらに数列 $\{a_n\}$ が収束するとき, 数列 $\{-a_n\}$ も収束する. なお, $c > 0$ であるとき

$$\begin{aligned}&\forall\varepsilon > 0 \text{ について } \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } |a_n - \alpha| < \varepsilon \quad (n \geqq N)\\ &\quad \iff \forall\varepsilon > 0 \text{ について } \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } |a_n - \alpha| < c \cdot \varepsilon \quad (n \geqq N_0)\end{aligned}$$

の事実はよく使用する.

問題 1.1. 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとき, 数列 $\{-a_n\}$ も収束し, その極限値が $-\alpha$ であることを示せ.

数列が収束しないときは, その数列は発散するという. 特に a_n が限りなく大きくなる数列 $\{a_n\}$ は正の無限大に発散するといい, 数列 $\{-a_n\}$ が正の無限大に発散するときは, 負の無限大に発散するという.

定義 1.2.

$$\begin{aligned}&\text{数列 } \{a_n\} \text{ が正の無限大に発散する}\\ &\quad \overset{\text{def}}{\iff} \forall G \text{ について } \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } a_n > G \quad (n \geqq N)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{数列 } \{a_n\} \text{ が負の無限大に発散する}\\ &\quad \overset{\text{def}}{\iff} \text{数列 } \{-a_n\} \text{ が正の無限大に発散する}\end{aligned}$$

である. 数列 $\{a_n\}$ が正の無限大に発散するとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

または

$$a_n \to +\infty \qquad (n \to \infty)$$

と記す．記号 $+\infty$ は符号を略して ∞ と記すこともある．また, 負の無限大に発散するとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

または

$$a_n \to -\infty \qquad (n \to \infty)$$

と記す．

数列を収束性について分類すると

$$\begin{cases} \text{収束} \\ \\ \text{発散} \begin{cases} \text{正の無限大に発散} & \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \\ \text{負の無限大に発散} & \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \\ \text{その他 (「振動」ということもある)} \end{cases} \end{cases}$$

となる．

注意 数列の極限について考察する場合, 実数の連続性に関する公理を仮定することが多い．例えば, アルキメデスの原理の成立を仮定しなければ

$$\lim_{n\to\infty} n = +\infty \qquad \text{や} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{1}$$

を厳密に示すことも難しい．しかしながら, 実数の連続性を理解するには多少の知識が必要となるので, その説明は後で行うことにした．以下, (1) は成り立つことを認めて説明を続ける．

2 極限値の一意性

実数 $a, b \in \mathbb{R}$ について

$$|a+b| \leqq |a| + |b| \qquad \textbf{(三角不等式)}$$

が常に成り立つ．この性質により, 次の定理を得る．

定理 2.1. 数列 $\{a_n\}$ が収束するとき, その極限値は一意[*2]である．

(証明) 与えられた数列が, 異なる実数値に収束すると矛盾が生じることを示す．

数列 $\{a_n\}$ が α と β に収束し, $\alpha \neq \beta$ だとする．このとき, 定義により

$$\varepsilon = |\alpha - \beta|/2 > 0$$

について

$$n \geqq N_1 \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon,$$

かつ

$$n \geqq N_2 \Longrightarrow |a_n - \beta| < \varepsilon$$

[*2] 唯一通りであること

をみたす自然数 N_1 と N_2 がある. したがって $N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと

$$|a_N - \alpha| < \varepsilon \qquad \text{かつ} \qquad |a_N - \beta| < \varepsilon$$

をみたす. したがって, 三角不等式により

$$\begin{aligned} |\alpha - \beta| &= |\alpha - a_N + a_N - \beta| \\ &\leqq |\alpha - a_N| + |a_N - \beta| \\ &< \varepsilon + \varepsilon \\ &= |\alpha - \beta| \end{aligned}$$

が成り立ち, 矛盾 ($|\alpha - \beta| \neq |\alpha - \beta|$ となってしまう) が生じる. よって $\alpha = \beta$ でなければならない □

この定理により, 与えられた数列が収束するならば, その極限値を何らかの方法で 1 つ発見できれば (他の値に収束する可能性はなくなったので), 数列の極限値を決定できることが分かった. また, 極限値が一意に定まることは非常に重要で, 集合 $\mathbb{R}$ をきちんと定義する際にも, 極限値が一意に定まるように工夫する.

3 極限の性質

数列 $\{a_n\}$ が α に収束する定義を定めたからといって, 実際に与えられた数列の極限を求めるときには役に立たないことが多い. 何故なら, 極限値 α が何であるかは定義からは全く分からないからである. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を示すことより, $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めることの方が本来は難しいのである. 具体的な極限値を求めるためには, 与えられた数列がどんな値に収束するかを予測することが必要になる. — この予測のためには数列の極限の性質を知っておかなければならない. 収束するであろう値が予測できたならば, その値に収束することは (予想が正しければ) 定義などで確認できる.

3.1 有界な数列

数列 $\{a_n\}$ について

$$a_n < M \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

をみたす (n に無関係な) 定数 M が存在するとき, 数列 $\{a_n\}$ は**上に有界**であるといい, 逆に

$$M < b_n \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

をみたす定数 M が存在する数列 $\{b_n\}$ を**下に有界**な数列という. また, 上にも下にも有界な数列を単に**有界**な数列という.

$$\text{数列 } \{a_n\} \text{ が有界} \iff \text{全ての } n \text{ において } |a_n| < M \text{ をみたす定数 } M \text{ が存在する}$$

が成り立つ. なお, ここで登場した定数 M は収束する数列においても極限値である必要はない. 有界な数列の例をあげておく. 例えば, 数列 $\{n\}$ は $-100 < n$ である[*3]ので下に有界であるが上に有界ではない. また, 数列 $\{1/n\}$ や $\{(-1)^n\}$ は有界数列である.

問題 3.1. 数列 $\{1/n\}$ や $\{(-1)^n\}$ が有界であることを示せ.

定理 3.1. 収束する数列は有界である.

[*3] $-1 < n$ としても別に構わない. n によらない定数であることが重要である.

(証明) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とする. 定義により, 任意の $\varepsilon > 0$ について N が存在し, $n \geqq N$ については

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ.

$$\begin{aligned} |a_n - \alpha| < \varepsilon &\iff \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon \\ &\implies |a_n| < \max\{|\alpha - \varepsilon|, |\alpha + \varepsilon|\} \end{aligned}$$

であることに注意すれば,

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, |\alpha - \varepsilon|, |\alpha + \varepsilon|\}$$

とおくと, 任意の n について

$$|a_n| < M$$

をみたし, 数列 $\{a_n\}$ は有界となる □

対偶を考えれば, 次を得る.

系 3.2. 有界でない数列は発散する.

3.2 和差積商の極限

2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ があったとき, その数列から, 新たな数列を定義することが出来る. 例えば, 和によって $c_n = a_n + b_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ と定義すると, 一般に数列 $\{c_n\}$ は, $\{a_n\}$ でも $\{b_n\}$ でもない新たな数列である. このように $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ から和で定義された数列を $\{a_n + b_n\}$ と記す. 同様にして, 差により $\{a_n - b_n\}$, 積により $\{a_n b_n\}$, 商により $\{a_n / b_n\}$ が定義される. これらの数列の収束性や極限値は高校でも習ったと思われ, 既知であると思う. しかし, ε–δ 論法に基づく定義にしたがう証明は高校では習ってないであろうから, 念のために示しておく.

定理 3.3 (収束する数列の和差の極限)**.** 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ のどちらも収束し, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする. このとき, 数列 $\{a_n + b_n\}$ および $\{a_n - b_n\}$ のどちらも収束し

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta, \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \alpha - \beta$$

となる.

(証明) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ の定義より, 任意の $\varepsilon > 0$ について N_0 が存在し, $n \geqq N_0$ で

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon/2, \qquad |b_n - \beta| < \varepsilon/2$$

とできる. したがって, 三角不等式を用いると, 不等式

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| &= |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \\ &\leqq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

が $n \geqq N_0$ で成り立つ. したがって $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$ である. 同様に

$$\begin{aligned} |(a_n - b_n) - (\alpha - \beta)| &= |(a_n - \alpha) + (\beta - b_n)| \\ &\leqq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

が $n \geqq N_0$ について成り立つので, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \alpha - \beta$ である □

定理 3.3 は収束する数列に関しては

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n \quad (\text{符号同順})$$

となることを言っているが, 発散する場合には何も述べていない. しかし, 次の定理が成り立つことは容易に推測できるであろう.

定理 3.4. 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について

	$\lim_{n\to\infty} a_n$	$\lim_{n\to\infty} b_n$	$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$
(i)	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
(ii)	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
(iii)	収束	$+\infty$	$+\infty$
(iv)	収束	$-\infty$	$-\infty$

が成り立つ.

(証明) (i) のみ示す. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ のとき $\forall G$ について

$$a_n > G/2 \qquad (n \geqq N_0)$$

をみたす N_0 および

$$b_n > G/2 \qquad (n \geqq N_1)$$

が存在する. したがって, $N = \max\{N_0, N_1\}$ とすると

$$a_n + b_n > G/2 + G/2 = G \qquad (n \geqq N)$$

をみたすので

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$$

である □

注意 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ かつ $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ のときは不定[*4]である. ($\infty - \infty$ 型の不定形と呼ばれる.)

問題 3.2. 上の (ii), (iii), (iv) を示せ.

定理 3.5 (収束する数列の積の極限)**.** 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ のどちらも収束し, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする. このとき, 数列 $\{a_n b_n\}$ も収束し

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha\beta$$

となる.

(証明) 定理 3.1 により数列 $\{b_n\}$ は有界である. すなわち, すべての n について

$$|b_n| < M$$

をみたす $M(> 0)$ が存在する.

[*4] 定まらない. つまり数列によって, 収束することもあれば発散することもある

$\varepsilon > 0$ を任意に決める. 三角不等式により

$$\begin{aligned} |a_n b_n - \alpha\beta| &= |(a_n - \alpha)b_n + \alpha(b_n - \beta)| \\ &\leqq |a_n - \alpha| \cdot |b_n| + |\alpha| \cdot |b_n - \beta| \end{aligned} \tag{*}$$

である. また, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ の定義により,

$$n \geqq N_0 \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

となる N_0 が存在する.

$\alpha = 0$ のときは $(*)$ より $n \geqq N_0$ について

$$\begin{aligned} |a_n b_n - \alpha\beta| &< \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立ち,

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \alpha\beta$$

である.

$\alpha \neq 0$ のときは $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ の定義により,

$$n \geqq N_1 \Longrightarrow |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}$$

となる N_1 が存在する. したがって, $N = \max\{N_0, N_1\}$ とすると, $(*)$ により $n \geqq N$ で

$$\begin{aligned} |a_n b_n - \alpha\beta| &\leqq |a_n - \alpha| \cdot |b_n| + |\alpha| \cdot |b_n - \beta| \\ &< \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{|2\alpha|} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

であるので, $\alpha \neq 0$ のときも

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \alpha\beta$$

を得る □

発散する数列の積の極限についても, 以下の定理が成り立つ.

定理 3.6. 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について

	$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$	$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$	$\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n b_n)$
(i)	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
(i)$'$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
(ii)	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
(ii)$'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
(iii)	$\alpha(\neq 0)$ に収束	$+\infty$	$+\infty \quad (\alpha > 0)$ $-\infty \quad (\alpha < 0)$
(iii)$'$	$\alpha(\neq 0)$ に収束	$-\infty$	$-\infty \quad (\alpha > 0)$ $+\infty \quad (\alpha < 0)$

が成り立つ.

(証明) (i) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ のとき, $\forall G$ について,

$$G_0 = \max\{1, G\}$$

とおくと $G_0 (\geqq 1)$ について $n \geqq N$ のとき

$$a_n > G_0 \quad かつ \quad b_n > G_0$$

をみたす N が存在する. このとき

$$a_n b_n > {G_0}^2 \geqq G_0 \geqq G \qquad (n \geqq N)$$

をみたすので $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = +\infty$ である.

(i)′ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ のときについても $G_0 = \max\{1, G\} (\geqq 1)$ について $n \geqq N$ のとき

$$-a_n > G_0 \quad かつ \quad -b_n > G_0$$

をみたす N が存在するので,

$$a_n b_n = (-a_n)(-b_n) > G \qquad (n \geqq N)$$

となる.

(ii), (ii)′, (iii), (iii)′ も同様に示される □

注意 (iii) および (iii)′ において $\alpha = 0$ のときは不定である. ($0 \cdot \infty$ 型の不定形と呼ばれる.)

問題 3.3. 上の (ii), (ii)′, (iii), (iii)′ を示せ.

残っているのは, 数列 $\{a_n/b_n\}$ であるが, そのために, 補題を示そう.

補題 3.7. 数列 $\{b_n\}$ が 0 でない実数 β に収束する, つまり $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta \neq 0$ とする. このとき

$$0 < \frac{|\beta|}{2} < |b_n| \qquad (\forall n \geqq N_0)$$

をみたす N_0 が存在する.

(証明)

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta \neq 0$$

であるならば, 任意の $\varepsilon > 0$ について

$$n \geqq N \Longrightarrow |b_n - \beta| < \varepsilon$$

となる N が存在するのだから, 特に $|\beta|/2 (> 0)$ についても

$$n \geqq N_0 \Longrightarrow |b_n - \beta| < \frac{|\beta|}{2}$$

となる N_0 が存在する. すなわち $n \geqq N_0$ について

$$-\frac{|\beta|}{2} < b_n - \beta < \frac{|\beta|}{2}$$

をみたす. $\beta > 0$ のときは

$$0 < \frac{\beta}{2} < b_n,$$

$\beta < 0$ のときは

$$b_n < \frac{\beta}{2} < 0$$

であるので, $n \geqq N_0$ について

$$0 < \frac{|\beta|}{2} < |b_n|$$

が成り立つ □

補題 3.8. 数列 $\{b_n\}$ が $\beta(\neq 0)$ に収束するとき数列 $\{1/b_n\}$ も収束し

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta}$$

である.

(証明) $\beta \neq 0$ であるので,

$$0 < \frac{|\beta|}{2} < |b_n| \qquad (\forall n \geqq N_0)$$

をみたす N_0 が存在する (補題 3.7). また, 仮定より任意の $\varepsilon > 0$ について $n \geqq N_1$ なら

$$|b_n - \beta| < \frac{|\beta|^2}{2} \cdot \varepsilon$$

をみたす N_1 も存在する. よって $N = \max\{N_0, N_1\}$ とおくと $n \geqq N$ において

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta}\right| &= \frac{|b_n - \beta|}{|\beta b_n|} \\ &< |b_n - \beta| \cdot \frac{1}{|\beta| \cdot |\beta/2|} \\ &< \frac{|\beta|^2 \varepsilon}{2} \cdot \frac{2}{|\beta|^2} = \varepsilon\end{aligned}$$

が成り立ち,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta}$$

である □

注意 $b_n \neq 0$ を仮定しなくても良いことは注意が必要である. 実際, この補題でも仮定していない.

定理 3.5 と 補題 3.8 から次の定理が導かれる.

定理 3.9 (収束する数列の商の極限)**.** 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ のどちらも収束し, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta \neq 0$ とする. このとき, (十分大きい n から先で定義される) 数列 $\{a_n/b_n\}$ も収束し

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$$

となる.

注意 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ のときは不定である. (0/0 型の不定形と呼ばれる.)

問題 3.4. 定理 3.9 を示せ.

補題 3.10. 数列 $\{b_n\}$ が正または負の無限大に発散するならば

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=0$$

である.

(証明) $\forall\varepsilon>0$ について, $n\to\infty$ のとき $|b_n|\to\infty$ であるので

$$|b_n|>1/\varepsilon \qquad (n\geqq N_0)$$

をみたす N_0 が存在する. したがって, $n\geqq N_0$ について

$$\left|\frac{1}{b_n}-0\right|=\left|\frac{1}{b_n}\right|<\varepsilon$$

である □

例題 1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1/2)^n=0$ を示せ.

(解答)$b_n=2^n$ とおくと $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=+\infty$ である[*5]ので, 補題 3.10 により,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=0$$

である □

この補題 3.10 を少し拡張して, 次の定理を得る.

定理 3.11. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\pm\infty$ のときは数列 $\{a_n\}$ が収束するならば

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$$

が成り立つ.

(証明)

$$\frac{a_n}{b_n}=a_n\cdot\frac{1}{b_n}$$

と見なせば, 定理 3.5 と上の補題 3.10 より明らか □

注意 定理 3.11 において $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\pm\infty$ のとき (∞/∞ 型の不定形と呼ばれる) は不定である.

3.3 部分列

数列 $\{a_n\}=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$ の中から無限個の項を選び出して新たな数列を作ることが出来る. 例えば

(i) 数列 $\{a_{2n}\}=\{a_2,a_4,a_6,\cdots\}$,
(ii) 数列 $\{a_{n+1}\}=\{a_2,a_3,a_4,\cdots\}$,
(iii) 数列 $\{a_{n^2}\}=\{a_1,a_4,a_9,\cdots\}$,
(iv) $p(n)$ を n 番目に小さな素数としたときの数列 $\{a_{p(n)}\}=\{a_2,a_3,a_5,\cdots\}$

[*5] 後述する. (アルキメデスの原理から示される)

などがある. これらの数列は, 数列 a_n の部分列と呼ばれる. 正確には次のように定義する.

定義 3.12. 数列 $\{a_n\}$ が与えられたとき, つぎの (I),(II),(III) を全て満たす数列 $\{a_{m_n}\}$ を数列 $\{a_n\}$ の**部分列**という.

(I) 全ての n について $m_n \in \mathbb{N}$ である.

(II) (狭義単調増加性)

$$m_1 < m_2 < \cdots < m_{n-1} < m_n < \cdots$$

をみたす.

(III) $\lim_{n\to\infty} m_n = +\infty$ である.[*6]

例えば, 先ほどの数列においては (i) $m_n = 2n$, (ii) $m_n = n+1$, (iii) $m_n = n^2$, (iv) $m_n = p(n)$ と見なせば, (I), (II), (III) をみたす.

(II) により $\forall n \in \mathbb{N}$ について

$$n \leqq m_n$$

が成り立つ. このことから, 部分列に関しては次の定理が成り立ち, 頻繁に利用される.

定理 3.13. 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとき, その任意の部分列 $\{a_{m_n}\}$ も α に収束する. すなわち

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_{m_n} = \alpha$$

となる.

(証明) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ の定義より, $\forall \varepsilon(>0)$ について

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon \qquad (n \geqq N)$$

をみたす N が存在する. したがって $m_n(\geqq n) \geqq N$ についても

$$|a_{m_n} - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つので,

$$\lim_{n\to\infty} a_{m_n} = \alpha$$

を得る □

例題 2. 極限 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1}$ を求めよ.

(解答)$a_n = 1/n$ とし, $m_n = n+1$ とする. このとき,

$$a_{m_n} = \frac{1}{n+1}$$

であり数列

$$\{a_{m_n}\} = \{a_{n+1}\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$$

は数列 $\{a_n\}$ の部分列である.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

[*6] この条件は, アルキメデスの原理を認めるならば不要である

であるので, 部分列 $\{a_{m_n}\}$ の極限とみなせば

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_{m_n}=0$$

である. □

問題 3.5. 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\sqrt{2}}$ においては例題の論法は使えない. その理由を考えよ.

定理の対偶を考えれば, 発散する部分列が存在すれば, もとの数列も発散する. しかし, 収束する部分列が存在したとしても, もとの数列が収束するとは限らない. 例えば, 発散する数列 $\{(-1)^n\}$ の部分列 $\{(-1)^{2n}\}$ は 1 に収束している.

3.4 大小関係とはさみうちの原理

$a_n \leqq b_n$ をみたす数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の極限の大小関係を考える.

定理 3.14 (極限の大小)**.** 全ての n について

$$a_n \leqq b_n \tag{2}$$

をみたす数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ がどちらも収束し, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ ならば

$$\alpha \leqq \beta$$

である.

(証明) $\alpha>\beta$ と仮定する. このとき, $\varepsilon=(\alpha-\beta)/2\ (>0)$ とおくと

$$|a-\alpha|<\varepsilon \qquad (n \geqq N_0)$$

および

$$|b-\beta|<\varepsilon \qquad (n \geqq N_1)$$

をみたす N_0, N_1 が存在する. 一般に, $A, B, C \in \mathbb{R}$ について

$$|A-B|<C \iff B-C<A<B+C$$

が成り立つことに注意すれば $N=\max\{N_0,N_1\}$ とおくと $n \geqq N$ について

$$b_n<\beta+\varepsilon=(\alpha+\beta)/2=a-\varepsilon<a_n$$

が成り立ち, (2) と矛盾する. したがって $\alpha \leqq \beta$ でなければならない □

ここで (2) の代わりに

$$a_n<b_n$$

が成り立つときでも

$$\alpha<\beta$$

が成り立つとは限らない. 例えば $a_n=-1/n$, $b_n=1/n$ なら, $a_n<b_n$ だが

$$\alpha=0=\beta$$

であり, $\alpha<\beta$ は成り立たない. このことは間違えやすいので, しっかり理解しておくこと.

問題 3.6. 定理 3.14 において「全ての n 」ではなく,「ある M_0 より大きな全ての n」で (2) が成り立つ数列においても $\alpha \leqq \beta$ が成り立つことを示せ.

定理 3.15 (はさみうちの原理[*7]). 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が全ての n について

$$a_n \leqq b_n$$

をみたし, 同じ実数 α に収束するとき, 数列 $\{c_n\}$ が全ての n について

$$a_n \leqq c_n \leqq b_n$$

をみたすならば

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$$

である.

(証明) $\varepsilon > 0$ を任意にとると, 仮定により

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon \qquad (n \geqq N_0)$$

をみたす N_0 が存在し,

$$|b_n - \alpha| < \varepsilon \qquad (n \geqq N_1)$$

をみたす N_1 も存在する. $N = \max\{N_0, N_1\}$ とおくと, $n \geqq N$ について

$$\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon, \quad \alpha - \varepsilon < b_n < \alpha + \varepsilon$$

が成り立つことに注意すれば

$$\alpha - \varepsilon < a_n \leqq c_n \leqq b_n < \alpha + \varepsilon$$

すなわち, $n \geqq N$ について

$$|c_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ. よって, $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ を得る □

問題 3.7. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ を示せ.

問題 3.8. 数列 $\{a_n\}$ が有界で $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ のとき $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0$ を示せ.

3.5 $\sqrt{a_n}$ の極限

$a_n \geqq 0$ をみたす数列 $\{a_n\}$ から新たな数列 $\{\sqrt{a_n}\}$ を定義することが出来る[*8].

補題 3.16. $0 \leqq a < b$ のとき $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ である.

(証明) $0 \leqq a < b$ のとき $\sqrt{a} \geqq \sqrt{b}$ だと仮定すると

$$\sqrt{a} \geqq \sqrt{b} \Longrightarrow a = (\sqrt{a}\,)^2 \geqq (\sqrt{b}\,)^2 = b$$

となって, 矛盾する □

この補題により次の定理を得る.

[*7] 「はさみうちの定理」ではなく「はさみうちの原理」という

[*8] $a \geqq 0$ について, $X^2 = a$ をみたす負でない実数 X (つまり $\sqrt{a}$) が唯一つ存在するから. 後述する定理 3.20 による.

定理 3.17. $\forall n$ について $a_n \geqq 0$ をみたす数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとき

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\alpha}$$

である.

(証明) $a_n \geqq 0$ であるので, 定理 3.14 により, $\alpha \geqq 0$ である.

$\alpha = 0$ のときは収束の定義により任意の $\varepsilon > 0$ について

$$0 \leqq a_n = |a_n| < \varepsilon^2 \qquad (n \geqq N_0)$$

をみたす N_0 が存在し, $n \geqq N_0$ について

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{\alpha}| = \sqrt{a_n} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

である.

$\alpha > 0$ のときは $\sqrt{\alpha} > 0$ であることに注意して, 定義により, 任意の $\varepsilon > 0$ について

$$|a_n - \alpha| < \sqrt{\alpha} \cdot \varepsilon \qquad (n \geqq N_1)$$

をみたす N_1 が存在する. よって $n \geqq N_1$ において,

$$\begin{aligned} |\sqrt{a_n} - \sqrt{\alpha}| &= \left| \frac{a_n - \alpha}{\sqrt{a_n} + \sqrt{\alpha}} \right| \\ &\leqq \left| \frac{a_n - \alpha}{\sqrt{\alpha}} \right| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

をみたす.

以上により

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\alpha}$$

を得る □

3.6 単調な数列

単調に増加する数列, つまり

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq a_n \leqq \cdots$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ を**単調増加**数列と呼び, 逆に単調に減少する数列, つまり

$$b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_{n-1} \geqq b_n \geqq \cdots$$

を満たす数列 $\{b_n\}$ を**単調減少**数列と呼ぶ. また, 単調増加または単調減少である数列を, 総称して**単調**であるという. 例えば, 数列 $\{n\}$ は単調増加数列, $\{1/n\}$ は単調減少数列であり, $\{(-1)^n\}$ は単調数列ではない.

問題 3.9. 数列 $\{1/n\}$ が単調減少数列であることを示せ.

定義により

定理 3.18. 単調増加数列は下に有界であり, 単調減少数列は上に有界である.

を得る.

証明するにはもう少し知識を必要とする[*9]ので, 以下の命題はあとで証明する.

[*9] 後述する.

定理 3.19 (有界な単調数列の収束性)**.** 有界な単調数列は収束する.

定理 3.20 (平方根の存在)**.** $a \geqq 0$ について $X^2 = a$ をみたす実数 $X \geqq 0$ が唯一つ存在する.

(証明) $a = 0$ のときは $X = 0$, $a = 1$ のときは $X = 1$ である.

$0 < a < 1$ のときを考える. 数列 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を次のように定義する. 第 1 項は

$$b_1 = 0, \qquad c_1 = 1$$

とし, 第 2 項以降は $d_n = ((b_n + c_n)/2)^2$ の値により

$$b_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{b_n + c_n}{2} & (d_n < a \text{ のとき}) \\ b_n & (d_n \geqq a \text{ のとき}) \end{cases}, \quad c_{n+1} = \begin{cases} c_n & (d_n < a \text{ のとき}) \\ \dfrac{b_n + c_n}{2} & (d_n \geqq a \text{ のとき}) \end{cases}$$

とする. 数列 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ は

$$0 = b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_n \leqq c_n \leqq \cdots \leqq c_2 \leqq c_1 = 1$$

をみたすので, それぞれ有界な単調数列であり収束する.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta, \qquad \lim_{n\to\infty} c_n = \gamma$$

とおくと, $\beta = \gamma$ となり, 求める X は β である. 実際,

$$|c_n - b_n| = \frac{1}{2} \cdot |c_{n-1} - b_{n-1}| = \cdots = \frac{1}{2^n} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

より,

$$\lim_{n\to\infty} |c_n - b_n| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} (c_n - b_n) = 0 \iff \beta - \gamma = 0$$

だから

$$\beta = \gamma (\geqq 0)$$

を得る. また, 各項の決め方により

$$b_n^2 \leqq a \leqq c_n^2$$

であるので, 定理 3.5, 3.14 より

$$\beta^2 \leqq a \leqq \gamma^2$$

で, $\beta = \gamma$ より $\beta^2 = a$ を得る. つまり, $X = \beta$ である. ここで, $\beta = 0$ だと $\beta^2 = a > 0$ に矛盾するので, $\beta > 0$ であることに注意.

$1 < a$ のときは $0 < 1/a < 1$ であるので, $\beta^2 = 1/a$ となる $\beta > 0$ が存在し, $X = 1/\beta$ である.

唯一性に関しては背理法で示す. 求める X として

$$\beta < \beta' \tag{3}$$

をみたす異なる実数 β, β' が存在すると仮定する. 不等式 (3) の両辺に $\beta \geqq 0$ を掛けると $\beta^2 \leqq \beta\beta'$, 同じく, 不等式 (3) の両辺に $\beta' > 0$ を掛けると $\beta\beta' < {\beta'}^2$ であるので

$$\beta^2 < {\beta'}^2$$

となる. これは $a = \beta^2 = {\beta'}^2$ に矛盾する □

数列が与えられたときに何らかの計算により極限値が具体的に求まれば, 収束することと極限値が同時に判明する. これは大したことではない. ところが, 極限値が具体的に分からなくても, 収束性だけが先に判明し, そのことを利用して極限の性質から極限値が判明することもある. これに似たことは数学でよく登場する. 覚えておくと, 今後の学習に役立つであろう.

例題 3. $a_1 = 1/2$, $a_{n+1} = (1 + a_n)/4$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ.

(解答)(I) 数列 $\{a_n\}$ が単調減少数列であることを示す. すなわち (*) $a_n - a_{n+1} \geqq 0$ を数学的帰納法で示す.
(i) $n = 1$ のとき $a_1 = 1/2$, $a_2 = (1 + 1/2)/4 = 3/8$ であり,

$$a_1 - a_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8} \geqq 0$$

となる. よって (*) は成り立つ.
(ii) $n = k$ のとき (*) が成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_{k+2} &= \frac{1 + a_k}{4} - \frac{1 + a_{k+1}}{4} \\ &= \frac{a_k - a_{k+1}}{4} \\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

で $n = k + 1$ のときも (*) が成り立つ.
以上 (i), (ii) より, 数列 $\{a_n\}$ は単調減少である.
(II) $\forall n$ について $a_n > 0$ であるので, 数列 $\{a_n\}$ は下に有界である.
以上 (I), (II) により, 数列 $\{a_n\}$ は有界な単調数列であるので収束する. そこで

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} a_n$$

とおく[*10]. このとき, 部分列 $\{a_{n+1}\}$ も収束し,

$$\lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \alpha$$

である. したがって

$$a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{4} \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + a_n}{4}$$

より, α は

$$\alpha = \frac{1 + \alpha}{4}$$

をみたさなければならない. これを解くと

$$\alpha = \frac{1}{3}$$

を得る. すなわち, 求める極限値は

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{3}$$

に限る □

[*10] 収束することが確認できたので α とおくことが出来る. 発散していたらこの論法は使えない

3.7 有名な極限の問題

最後に ε-δ 論法が有用な極限の問題を一例だけ紹介する.

問題 3.10. 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\alpha$$

を示せ.

(証明) 仮定より $\forall\varepsilon>0$ について

$$|a_n-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad(n\geqq N_1)$$

をみたす自然数 N_1 が存在する. このとき N_1 個の実数

$$|a_1-\alpha|,\ |a_2-\alpha|,\ \cdots,\ |a_{N_1}-\alpha|$$

の中で最大な値を M とおく. つまり

$$M=\max_{1\leqq n\leqq N_1}|a_n-\alpha|$$

とする. 今 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ だから, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{MN_1}{n}=0$ であり,

$$\frac{MN_1}{n}=\left|\frac{MN_1}{n}-0\right|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad(n\geqq N_2)$$

をみたす自然数 N_2 も存在する.

$N=\max\{N_1,N_2\}$ とおくと, $n\geqq N$ について

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}+a_{N_1+1}+\cdots+a_n}{n}-\alpha\right|\\
&=\frac{1}{n}\left|(a_1-\alpha)+(a_2-\alpha)+\cdots+(a_{N_1}-\alpha)+(a_{N_1+1}-\alpha)+\cdots+(a_n-\alpha)\right|\\
&\leqq\frac{1}{n}(\underbrace{M+M+\cdots+M}_{N_1})+\frac{1}{n}\Bigl(\underbrace{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+\cdots+\frac{\varepsilon}{2}}_{n-N_1}\Bigr)\\
&=\frac{MN_1}{n}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\\
&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{n}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立ち, 題意は示された □

4 補足

これまでの説明においても, 疑うこともなく当然成り立つ事実だとして, 実数の性質を説明無しに用いている. しかしながら, 微分積分の教科書や解析学の専門書においては, 実数とはどのような数であるかをはじめに説明してから本題に入るものが多い. 後回しになったが, 「実数の連続性」と呼ばれる, 実数の性質を紹介しておく.

実数の連続性の公理は複数あり, 書籍によって様々な公理を採用している. ただし, 今後のことを考えるならば, 他に応用できる公理を前提として, 学修を進める方が良い. $\mathbb{Q}$ における距離を絶対値として, 完備化したものが $\mathbb{R}$ である. こうして, 定義された $\mathbb{R}$ は, 和差積商の四則演算が定義され*11, 2 つの実数に大小関係を決めること*12が出来る. 難しく考えないで, 小学校以来習ってきた演算*13 と大小関係そのものと思っておけば良い. $\mathbb{Q}$ の絶対値による完備化で定義された $\mathbb{R}$ は以下の 2 つの公理が成り立つ.

公理 4.1 ($\mathbb{Q}$ の $\mathbb{R}$ における稠密性)**.** 任意の $\varepsilon > 0$ について, <u>実数</u> a が与えられたとき,

$$|a - q| < \varepsilon$$

をみたす <u>有理数</u> q が存在する.

公理 4.2 (実数の完備性)**.** $\mathbb{R}$ における全てのコーシー列は収束する.

4.1 稠密性

「稠密」は「ちゅうみつ」と読み, 隙間無く詰まっていることを意味する. 例えば, 実数 a, b が $a < b$ をみたすならば,

$$a < c < b$$

となる実数 c が必ず存在する. (例えば, $c = (b - a)/2$ とすれば良い.) これは, どんなに近い実数と実数の間にも, 別の実数が存在することを意味し, 文字通り, 実数が隙間無く詰まっていることを言っている. したがって, $\mathbb{R}$ は ($\mathbb{R}$ において) 稠密である.

一般に, 集合 S の部分集合 A について, $\forall s \in S$ について s の任意の近傍*14に A の元 a が存在するとき, 部分集合 A は S **において稠密**であるという. つまり, 公理 4.1 は, 実数 a を含むどんなに狭い開区間の中にも有理数が存在することを保証しており, $\mathbb{Q}$ が $\mathbb{R}$ において稠密であることを意味している.

公理 4.1 から次の定理を導くことが出来る.

定理 4.3. 不等式 $a < b$ をみたす任意の <u>実数</u> a, b について

$$a < q < b$$

をみたす <u>有理数</u> q が存在する.

(証明) $c = (b - a)/2$ とおけば $c \in \mathbb{R}$ であり, 公理 4.1 により $0 < \varepsilon_0 = b - c (= c - a)$ となる ε_0 についても

$$|c - q| < \varepsilon_0$$

となる有理数 q が存在する. このとき

$$\begin{aligned} |c - q| < \varepsilon_0 &\iff c - \varepsilon_0 < q < c + \varepsilon_0 \\ &\iff c - (c - a) < q < c + (b - c) \end{aligned}$$

*11 体 (たい) と呼ばれる集合である.
*12 全順序が定義されるという
*13 実数同士の和, 差, 積, 商も実数となるなど.
*14 s の「近く」の S の元全体の集合. $\mathbb{R}$ においては $U_\varepsilon(s) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - s| < \varepsilon\}$ (ε-近傍) などが有名.

より, 有理数 q は不等式

$$a < q < b$$

をみたす □

注意 逆に, 定理 4.3 が成り立つとき $\forall a \in \mathbb{R}$ について

$$a - \varepsilon < a + \varepsilon \qquad (\forall \varepsilon > 0)$$

であるので, $\forall \varepsilon > 0$ について

$$a - \varepsilon < q < a + \varepsilon$$

をみたす有理数 q が存在し, このとき

$$|a - q| < \varepsilon$$

である. したがって, 公理 4.1 が成り立つ. つまり, 公理 4.1 と定理 4.3 は同値である.

4.2 アルキメデスの原理

次の定理は「公理」として, 証明無しに紹介される本が多い. ここでは, 定理 4.3 から導いておく.

定理 4.4 (アルキメデスの原理[*15])**.** 任意の正の実数 a, b について

$$a < Nb$$

をみたす自然数 N が存在する.

(証明) $0 < b/a$ であるので

$$0 < q < \frac{b}{a}$$

をみたす有理数 $q(> 0)$ が存在する. q は整数 $N(\geqq 1)$ と $m(\geqq 1)$ を用いて $q = m/N$ と表すことが出来る. 特に N は自然数である. また,

$$0 < \frac{1}{N} \leqq \frac{m}{N} = q$$

が成り立つので

$$\frac{1}{N} < \frac{b}{a} \iff \frac{a}{N} < b$$

より, $a < Nb$ となる自然数 N が存在する □

任意の G について, $G \leqq 0$ のときは, $N = 1$ とする. $G > 0$ のときは定理 4.4 において $a = 1, b = 1/G$ と適用して,

$$1 < N \cdot \frac{1}{G}$$

をみたす自然数 N をとる. 以上のように N を決めれば, $\forall G$ について

$$n > G \qquad (n \geqq N)$$

をみたす. つまり, 以下の定理を得る.

定理 4.5.

$$\lim_{n \to \infty} n = \infty$$

[*15] これと同値な命題 (例えば, 定理 4.5, 4.6 など) もアルキメデスの原理と呼ぶことがある

また, 定理 4.5 から以下の定理を得る. (定理 4.4 において $a = 1$, $b = \varepsilon$ とおくことで直接示すことも可能である.)

定理 4.6.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

(証明) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n = \infty$ であるので $a_n = n$ とおくと定義より, $\forall G$ について $n \geqq N$ について $a_n > G$ となる N が存在する. ここで $G > 0$ としても構わないので, このとき

$$a_n > G \iff \frac{1}{n} < \frac{1}{G}$$

であることに注意すれば, $\forall \varepsilon > 0$ について, $b_n = 1/n$, $G = 1/\varepsilon$ とすると

$$|b_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{G} = \varepsilon \quad (n \geqq N)$$

となる N が存在する. よって, 数列 $\{b_n\}$ は 0 に収束し,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

を得る □

注意 1. 定理 4.6 から定理 4.4 を導くことも出来る. 実際, 定理 4.6 が成り立つとき,

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{b}{a} \qquad (n \geqq N)$$

をみたす N が存在し, このとき $a < Nb$ が成り立つ.

注意 2. 注意 1 により, 3 つの定理, 定理 4.4 と定理 4.5 と定理 4.6 は同値である.

例題 4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$ を示せ.

(解答) 二項定理[*16] より $n \geqq 1$ について

$$\begin{aligned} 2^n = (1+1)^n &= 1^n + n \cdot 1^{n-1} \cdot 1 + \cdots + 1^n \\ &= 1 + n + \cdots + 1 \\ &\geqq n + 1 \\ &> n \end{aligned}$$

であり, さらに, 定理 4.5 より $\forall G$ について

$$n > G \qquad (n \geqq N)$$

をみたす N が存在する. したがって, $n \geqq N$ について

$$2^n > n > G$$

をみたすので, 数列 $\{2^n\}$ が正の無限大に発散する定義をみたす. つまり

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$$

である □

[*16] $(a+b)^n = a^n + {}_nC_{n-1}a^{n-1}b + {}_nC_{n-2}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n$

4.3 コーシー列と完備性

公理 4.2 について簡単に説明しておく.

番号をある程度大きくしていくと, そこから先の番号の項については値の変化がどこまでも小さくなっていく「いかにも収束しそうな数列」をコーシー列という. 正確には次のように定義される.

定義 4.7 (コーシー列)**.** $\forall\varepsilon > 0$ について

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \qquad (m, n \geqq N)$$

となる N が存在する数列 $\{a_n\}$ を**コーシー列** (または**基本列**) という.

つまり, 公理 4.2 は「いかにも収束しそうな数列」が必ず収束することを保証するものである. 任意のコーシー列が収束する集合を**完備な**集合という.

実は, 収束する数列はすべてコーシー列である.

例題 5. 収束する数列 $\{a_n\}$ はコーシー列であることを示せ.

(解答) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とする. 定義により $\forall\varepsilon > 0$ について

$$|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n \geqq N)$$

をみたす N が存在する. このとき, $m, n \geqq N$ について

$$|a_m - a_n| = |(a_m - \alpha) - (a_n - \alpha)| \leqq |a_m - \alpha| + |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

であり, $\{a_n\}$ はコーシー列である □

したがって, 公理 4.2 のもとでは, 次の定理が成り立つ.

定理 4.8. 数列 $\{a_n\}$ が収束する $\iff$ 数列 $\{a_n\}$ はコーシー列である

最後に, 定理 3.19 の証明をしておく.

定理 3.19 (有界な単調数列の収束性) の証明

数列 $\{a_n\}$ が単調増加数列で,

$$a_n < M$$

をみたす定数 M が存在するときを考える. $\mathbb{R}$ の部分集合 B を数列 $\{a_n\}$ のどの項よりも真に大きい実数全体の集合とする. すなわち

$$B = \{b \mid a_n < b \quad (\forall a_n)\}$$

とする. $M \in B$ であり, $\forall b \in B$ については $\forall n$ について $a_n < b$ が成り立ち, $\forall c \notin B$ については

$$c \leqq a_n \qquad (n \geqq N)$$

をみたす N が必ず存在する. このことに注意して, 数列 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を, 第 1 項を

$$c_1 = a_1, \qquad b_1 = M$$

とし, 第 2 項以降は $d_n = (b_n + c_n)/2$ の値により

$$b_{n+1} = \begin{cases} d_n & (d_n \in B \text{ のとき}) \\ b_n & (d_n \notin B \text{ のとき}) \end{cases}, \quad c_{n+1} = \begin{cases} c_n & (d_n \in B \text{ のとき}) \\ d_n & (d_n \notin B \text{ のとき}) \end{cases}$$

と決める. 項の決め方により, $\forall n$ について

$$b_n \in B, \qquad c_n \notin B$$

であり,

$$c_n \leqq a_n < b_n \qquad (n \geqq N_0) \tag{4}$$

となる N_0 が存在する. また, $\{b_n\}$ は単調減少, $\{c_n\}$ は単調増加数列であるので $n \geqq N_0$ について

$$a_1 = c_1 \leqq c_2 \leqq \cdots \leqq c_n \leqq a_n < b_n \leqq \cdots \leqq c_2 \leqq c_1 = M$$

をみたす.

また, $\lim_{n\to\infty} (1/2)^n = 0$ であったので $\forall \varepsilon > 0$ について

$$\frac{M - a_1}{2^n} < \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \qquad (n \geqq N_1)$$

をみたす N_1 が存在し, $N = \max\{N_0, N_1\}$ とおくと $n \geqq N$ について

$$c_N \leqq b_n \leqq b_N$$

である. したがって, $m, n \geqq N$ について

$$\begin{aligned}
|b_m - b_n| &\leqq |b_N - c_N| \\
&= \frac{1}{2}|b_{N-1} - c_{N-1}| \\
&\ \ \vdots \\
&= \frac{1}{2^{N-1}}|b_1 - c_1| \\
&= \frac{1}{2^{N-1}} \cdot (M - a_1) < \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立ち, $\{b_n\}$ はコーシー列, すなわち収束する. 同様に $m, n \geqq N$ について

$$|c_m - c_n| < \varepsilon$$

だから, $\{c_m\}$ も収束する.

$$\beta = \lim_{n\to\infty} b_n, \qquad \gamma = \lim_{n\to\infty} c_n$$

とおくと $\beta = \gamma$ となる. 何故なら,

$$|b_n - c_n| = \frac{1}{2^{n-1}}(M - a_1)$$

により, 数列 $\{|b_n - c_n|\}$ は 0 に収束し,

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - c_n) = 0$$

となるからである.

また, 不等式 (4) と 定理 3.15 により

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \beta$$

である. したがって, 上に有界な単調増加数列は収束する. 単調減少数列 $\{a_n\}$ に関しては, $\{-a_n\}$ が単調増加数列になるので自明である □

参考書籍

本文に登場する語句や証明, 考え方は次の書籍を参考にした.

荒井正治	『理工系 微積分学 – 第 3 版 – 』	(学術図書出版社)
笠原晧司	『微分積分学』	(サイエンス社)
志村五郎	『数学で何が重要か』	(ちくま学芸文庫)
下村宏彰 · 三上俊介	『新装版 微分積分学』	(学術図書出版)
吹田信之 · 新保経彦	『理工系の微分積分学』	(学術図書出版社)
杉浦光夫	『基礎数学 2 解析入門 I』	(東京大学出版会)