# コーシー列と実数 ($\varepsilon$-$\delta$ 論法入門 3)

立命館大学理工学部数学学修相談会

2018 年 1 月 9 日 *

**概要**

実数とコーシー列と呼ばれる数列は密接な関係がある. コーシー列と呼ばれる数列の性質を紹介し, その後, 有理数から実数を構築する完備化を紹介する.

## 目次



# 1 はじめに

自然数全体の集合を $\mathbb{N}$, 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$, 有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$, 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と記す. ここでは 0 は自然数に含めないことにする.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

$\mathbb{R}$ は (四則演算が定義されて, 2 つの実数には普通の大小関係が決まるような) 以下の 2 つの公理が成り立つ集合とする.

**公理 1.1** ($\mathbb{Q}$ の $\mathbb{R}$ における稠密性)**.** 任意の $\varepsilon > 0$ について, 実数 $a$ が与えられたとき,

$$|a - q| < \varepsilon$$

* 執筆 平岡由夫

をみたす有理数 $q$ が存在する.

**公理 1.2** (実数の完備性)**.** $\mathbb{R}$ における全てのコーシー列は収束する.

公理 1.1 から以下の定理を得ることは以前示した.

**定理 1.3** (アルキメデスの原理)**.** 任意の実数 $a > 0$, $b > 0$ について

$$a < Nb$$

となる自然数 $N$ が存在する.

逆に, 定理 1.3 が成り立つとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$1 < m \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$

となる自然数 $m$ が存在する. (定理において $a$ を 1, $b$ を $\varepsilon/2$ とする.) また,

$$m|a - \varepsilon/2| < n \tag{1}$$

をみたす最小の自然数 $n$ が存在する. 実際, $m|a - \varepsilon/2| = 0$ のときは $n = 1$ とし, $m|a - \varepsilon/2| > 0$ のときは, 定理 1.3 により

$$m|a - \varepsilon/2| < \ell$$

となる自然数 $\ell$ が存在する (定理において $a$ を $m|a - \varepsilon/2|$, $b$ を 1 とする) ので有限個の元の集合

$$\{1, 2, \cdots, \ell\}$$

のうち, (1) をみたす最小の元を $n$ とすれば良い.

このとき $n$ が (1) をみたす最小の自然数であるので

$$n - 1 \leqq m|a - \varepsilon/2| < n$$

すなわち

$$m|a - \varepsilon/2| < n \leqq m|a - \varepsilon/2| + 1 \tag{2}$$

をみたす. 不等式 (2) の最左辺については

$$m|a - \varepsilon/2| \geqq m(a - \varepsilon/2) > m(a - \varepsilon)$$

であり, $m(a - \varepsilon)$ より真に大きい. また, 不等式 (2) の最右辺については, 三角不等式[*1]により

$$m|a - \varepsilon/2| + 1 < m|a - \varepsilon/2| + m \cdot \varepsilon/2 \leqq m|a| + m|\varepsilon/2| + m \cdot \varepsilon/2 = m(a + \varepsilon)$$

が成り立つので, $m(a + \varepsilon)$ より真に小さい. よって, (2) より

$$m(a - \varepsilon) < n < m(a + \varepsilon)$$

が成り立ち, $m$ で割ると

$$a - \varepsilon < n/m < a + \varepsilon$$

[*1] $|a + b| \leqq |a| + |b|$

を得る. つまり,

$$\left|a - \frac{n}{m}\right| < \varepsilon$$

が成り立ち, $n/m$ は有理数であるから, 公理 1.1 が成り立つ.

以上により, 公理 1.1 と定理 1.3 は同値であることが示された. したがって, 公理 1.1 を 定理 1.3 に置き換えても構わない. また, 定理 1.3 と同値である

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad や \qquad \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

を公理 1.1 の代わりにしても良いのである. これらは, 高校での数学において当然のように使用してきた性質なので, 公理 1.1 は表現は異なっても, 特に目新しいものではない.

大学に入ってからの数学においては, 公理 1.2 を理解しておくことの方が重要であり, しかも頻繁に登場する. そのために, コーシー列[*2]の性質を理解しておく必要がある. なお, 他の本においても実数の連続性の公理の成立を仮定してあるが, 上に紹介した 2 つの公理 1.1, 1.2 とは異なる事が多い. 特に, 古くから解析学の名著と呼ばれるものに多いが, 数学を専門にする者以外には, しばらくは使用しないであろう新しい言葉や集合論の知識が登場し, 初学者にとっては取っつきにくく, 良い影響を与えない. ($\varepsilon$-$\delta$ 論法も取っつきにくいものではあるが.) また, 完備性と呼ばれる性質は複素関数を学ぶ上でも非常に重要である. その理由もあって, これらの公理を採用しなかった. 必要と思われる場合は, 各自で調べて読んでおいても良いかもしれない. ただし, それらは, 公理 1.1, 1.2 と同値であるので心配しなくて良い.

# 2 コーシー列の性質

## 2.1 コーシー列の定義

番号を大きくしていくと, 項の変化がどこまでも小さくなっていく[*3]「いかにも収束しそうな数列」をコーシー列または基本列といい, 正確には次のように定義される.

**定義 2.1** (コーシー列の定義)**.** $\forall\varepsilon > 0$ について

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \qquad (m, n \geqq N) \tag{3}$$

となる $N$ が存在する数列 $\{a_n\}$ を**コーシー列** (または**基本列**) という.

この定義はつぎのように言い換えても良い.

**定理 2.2.**

数列 $\{a_n\}$ がコーシー列
$\iff$ $\forall\varepsilon > 0$ について $|a_n - a_N| < \varepsilon$ $(n \geqq N)$ をみたす自然数 $N$ が存在する

(証明) ($\Longrightarrow$) (3) は $m = N$ についても成り立つので自明.
($\Longleftarrow$) 仮定により, 任意の $\varepsilon > 0$ について

$$|a_n - a_N| < \varepsilon/2 \qquad (n \geqq N)$$

[*2] 基本列と呼ばれることもある
[*3] 数直線上に各項を次々に描画していくとそのうち動かなくなり, ほとんど重なっていく!

となる $N$ が存在し, もちろん $m \geqq N$ について

$$|a_m - a_N| < \varepsilon/2$$

が成り立つ. したがって, $m, n \geqq N$ について

$$\begin{aligned}|a_m - a_n| &= |(a_m - a_N) + (a_N - a_n)| \\ &\leqq |a_m - a_N| + |a_n - a_N| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\end{aligned}$$

が成り立ち, $\{a_n\}$ はコーシー列である $\square$

**注意** この定理は, 数列 $\{a_n\}$ が $a_N$ に収束することを言っているのではない. そもそも $a_N$ は $\varepsilon$ の値ごとに $N$ が変化するので, 定数ではない.

## 2.2 コーシー列になる数列

数列 $\{a_n\}$ がコーシー列であるとは, 十分大きな, 自然数 $N$ を取ると, $a_N$ を中心に含む, 任意の幅 $2\varepsilon$ の中に, $n \geqq N$ の全ての項 $a_n$ を含めることができる数列であることを言っている. これを第 $n$ 項 $a_n$ とその次の項 $a_{n+1}$ の差の変化が 0 に近づくのだから, $n \to \infty$ のとき $|a_{n+1} - a_n| \to 0$ となる数列をコーシー列と定義すれば良いと思うかもしれないが, それは良くない. なぜなら, $|a_{n+1} - a_n| \to 0$ とは, 数列 $\{a_n\}$ とその部分列 $\{a_{n+1}\}$ の差が無くなっていくことを意味しているだけであり, 有用とは言えないからである. 勿論, コーシー列はこの性質を持っているが, 同値ではない. 実際, $n \to \infty$ のとき, $|a_{n+1} - a_n| \to 0$ が成り立つときでも数列 $\{a_n\}$ がコーシー列にならないこともある. 例えば $n = 1, 2, \cdots$ について

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ は

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{n+1} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

であるが, 次の例題 1 で示される通りコーシー列にはならない.

**例題 1.** $n = 1, 2, \cdots$ について

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ はコーシー列でないことを示せ.

(解答) コーシー列の定義をみたさないことをいう. つまり, $\forall N \in \mathbb{N}$ について $m, n \geqq N$ のときに

$$|a_m - a_n| \geqq \varepsilon$$

となる $m, n$ と $\varepsilon > 0$ が存在することを示す.

$n \in \mathbb{N}$ のとき

$$\begin{aligned}|a_{2n}-a_n| &= a_{2n}-a_n \\ &= \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n\text{ 項}} \\ &\geqq \underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n\text{ 項}}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

であるので, 例えば $\varepsilon = 1/4$ のとき, いかなる $N$ についても $n \geqq N$ として, $m = 2n$ とすれば $m, n \geqq N$ であるが

$$|a_m - a_n| = |a_{2n} - a_n| \geqq \frac{1}{2} \geqq \frac{1}{4} = \varepsilon$$

となってしまい, 数列 $\{a_n\}$ はコーシー列ではない □

ところが, 例題 1 で定義された数列によく似た次の数列はコーシー列である.

**例題 2.** $n = 1, 2, 3, \cdots$ について

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ はコーシー列であることを示せ.

(解答) 有名な問題であるので, たいていの教科書に証明が記述されており, 数列がコーシー列の定義をみたすことを直接示していることが多い. ここでは, 定理 2.2 を用いる.

$\varepsilon > 0$ を任意に取る. $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ であるので

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \qquad (n \geqq N)$$

をみたす $N$ が存在する. このとき $n \geqq N$ なら

$$\begin{aligned}|a_n - a_N| &= a_n - a_N \\ &= \frac{1}{(N+1)^2}+\frac{1}{(N+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2} \\ &\leqq \frac{1}{N(N+1)}+\frac{1}{(N+1)(N+2)}+\cdots+\frac{1}{(n-2)(n-1)}+\frac{1}{(n-1)n} \\ &= \left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right)+\left(\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{N}-\frac{1}{n} < \frac{1}{N} \leqq \frac{1}{n} < \varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ. したがって, 数列 $\{a_n\}$ はコーシー列である □

公理 1.2 を認めるならば, 例題 2 の数列は収束し, 極限値が定まるはずである.[*4] ところが, この極限値は簡単には求められない. コーシー列の定義のポイントは, 数列の極限について何も述べていないところにある. 収束性さえも言及していない. 単に項が次第に変化しなくなる数列をコーシー列と決めると言っているだけな

[*4] 実際 $\pi^2/6$ に収束する. リーマンゼータ関数と呼ばれる関数の特殊値 $\zeta(2)$ である.

のである. しかし, 公理 1.2 (完備性) が成り立つときには収束することが保証されるので, 非常に役に立つ性質である. 「解析」という単語がつく分野においては, 級数[*5]について調べることが基本となる (上記の例の数列 $\{a_n\}$ も級数である) が, このときにコーシー列の性質が非常に有効となる.

項が次第に変化しなくなっていく数列, たとえば,

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leqq \frac{1}{2} \cdot |a_{n+1} - a_n|$$

をみたす数列 $\{a_n\}$ は

$$|a_2 - a_1| \geqq \frac{1}{2} \cdot |a_2 - a_1| \geqq |a_3 - a_2| \geqq \frac{1}{2} \cdot |a_3 - a_2| \geqq |a_4 - a_3| \geqq \cdots$$

と項の変化が次第に小さくなるということは分かるが, 極限はどうなるかは全く不明である. このことに注意して, 次の例題を考えよう.

**例題 3.** $n \geqq 1$ について

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leqq \frac{1}{2} \cdot |a_{n+1} - a_n|$$

をみたす数列 $\{a_n\}$ はコーシー列であることを示せ.

(解答) まず, 仮定により

$$\begin{aligned}
|a_{n+1} - a_n| &\leqq \frac{1}{2} \cdot |a_n - a_{n-1}| \\
&\leqq \frac{1}{2^2} \cdot |a_{n-1} - a_{n-2}| \\
&\quad \vdots \\
&\leqq \frac{1}{2^{n-1}} \cdot |a_2 - a_1|
\end{aligned}$$

が成り立つ. したがって, 自然数 $n$, $m$ について, $n \geqq m$ のとき

$$\begin{aligned}
|a_n - a_m| &= |(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_{m+1} - a_m)| \\
&\leqq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \cdots + |a_{m+1} - a_m| \\
&\leqq \left( \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-3}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} \right) \cdot |a_2 - a_1| \\
&= \frac{1}{2^{m-1}} \left\{ \left( \frac{1}{2} \right)^{n-m-1} + \left( \frac{1}{2} \right)^{n-m-2} + \cdots + \frac{1}{2} + 1 \right\} \cdot |a_2 - a_1| \\
&= \frac{1}{2^{m-1}} \cdot 2 \left( 1 - \frac{1}{2^{n-m}} \right) \cdot |a_2 - a_1| \\
&\leqq \frac{1}{2^{m-2}} \cdot |a_2 - a_1|
\end{aligned}$$

が成り立つ.

任意に $\varepsilon > 0$ をとると,

$$\frac{1}{2^n} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

であるので,

$$\frac{1}{2^{m-2}} \cdot |a_2 - a_1| < \varepsilon \qquad (m \geqq N)$$

[*5] 高校数学で習う無限級数

をみたす $N$ が存在する.

よって, (同じ $N$ で)

$$|a_n - a_N| \leqq \frac{1}{2^{N-2}} \cdot |a_2 - a_1| < \varepsilon \qquad (n \geqq N)$$

が成り立ち, 定理 2.2 より数列 $\{a_n\}$ はコーシー列である □

この例題を一般化すると次の定理を得る.

**定理 2.3.** 数列 $\{a_n\}$ について

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leqq r|a_{n+1} - a_n| \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

をみたす定数 $r$ $(0 \leqq r < 1)$ が存在するとき, 数列 $\{a_n\}$ はコーシー列となる.

**問題 2.1.** 定理 2.3 を示せ.

**問題 2.2.** $a_1 \geqq 1$, $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n + 1}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ がコーシー列であることを示せ.

**例題 4.** $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n + 1}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ.

(解答) 問題 2.2 により, 数列 $\{a_n\}$ はコーシー列だから収束する. したがって, $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ とおくと,

$$a_n > 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

より

$$\alpha \geqq 0 \tag{4}$$

であり, 収束数列, 部分列の性質より $\alpha$ は

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha + 1}$$

をみたす.

$$\begin{aligned} \alpha = 1 + \frac{1}{\alpha+1} &\iff \alpha - 1 = \frac{1}{\alpha + 1} \\ &\iff \alpha^2 - 1 = 1 \\ &\iff \alpha^2 = 2 \end{aligned}$$

より $\alpha = \sqrt{2}$ または $\alpha = -\sqrt{2}$ に限る. ここで (4) により $\alpha = -\sqrt{2} < 0$ は不適である. したがって, $\alpha = \sqrt{2}$ に限り, すなわち

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$$

を得る □

この例題の数列 $\{a_n\}$ は

(i) 全ての項が有理数からなるコーシー列である.

(ii) しかし, 極限値は有理数でない.

であり, $\mathbb{Q}$ だけだと, コーシー列が収束しないことがある一例になっている. 言い方をかえると, 有理数を順番に並べただけでは, その間に隙間が空いてしまうのである.

$\mathbb{Q}$ は「順序」や「四則演算」が定義される集合 (このような集合を順序体という) であり, $a, b \in \mathbb{Q}$ で $a < b$ なら

$$a < q < b$$

をみたす $q \in \mathbb{Q}$ が存在するので, 公理 1.1(稠密性) も成り立つ. しかし, 例題 4 から分かるように, $\mathbb{Q}$ においては, 公理 1.2(完備性) は成り立たない. このことが, $\mathbb{R}$ と $\mathbb{Q}$ の大きく異なる性質である.

実数の持つ 2 つの性質, 公理 1.1[*6] と 1.2, またはその同値な性質を「実数の連続性」という.

## 2.3 数列の収束性とコーシー列

収束する数列 $\{a_n\}$ はコーシー列であることは前に述べた. 実際, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ のとき, $\forall\varepsilon > 0$ について

$$|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (n \geqq N)$$

をみたす $N$ が存在する. このとき, 三角不等式により $m, n \geqq N$ について

$$|a_m - a_n| = |(a_m - \alpha) - (a_n - \alpha)| \leqq |a_m - \alpha| + |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

をみたす.

**定理 2.4.** 収束する数列はコーシー列である.

また, 公理 1.2 のもとではコーシー列は必ず収束するので, 次の定理が成り立つ.

**定理 2.5.** 数列 $\{a_n\}$ が収束する $\iff$ 数列 $\{a_n\}$ はコーシー列である

**系 2.6.** 発散する数列はコーシー列ではない. 逆に, コーシー列でない数列は発散する.

一般に, 部分列が収束したからと言って, もとの数列が収束するとは限らない. 例えば $\{(-1)^n\}$ などは偶数番目だけの部分列は 1 に収束してしまう. ところが, コーシー列に関しては次の定理が成り立つ.

**定理 2.7.** 数列 $\{a_n\}$ がコーシー列であるとき, $\alpha$ に収束する $\{a_n\}$ の部分列が一つでもあれば,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

となる.

(証明) 自然数

$$1 \leqq k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$$

をもちいて $\alpha$ に収束する部分列を $\{a_{k_n}\}$ と表す. $\forall\varepsilon > 0$ をとる. 数列 $\{a_n\}$ がコーシー列であるので定義により,

$$|a_m - a_n| < \varepsilon/2 \qquad (m, n \geqq N_1)$$

となる自然数 $N_1$ が存在する. また, $\{a_{k_n}\}$ が $\alpha$ に収束するので,

$$|a_{k_n} - \alpha| < \varepsilon/2 \qquad (n \geqq N_2)$$

をみたす $N_2$ も存在する. 今, $N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと, $k_m \geqq m$ だから $m, n \geqq N$ のとき

$$|a_m - a_n| < \varepsilon/2 \Longrightarrow |a_{k_m} - a_n| < \varepsilon/2$$

[*6] はじめに述べたようにこの公理はアルキメデスの原理と同値である

である．よって $m, n \geqq N$ について

$$\begin{aligned} |a_n - \alpha| &= |(a_n - a_{k_m}) + (a_{k_m} - \alpha)| \\ &\leqq |a_{k_m} - a_n| + |a_{k_n} - \alpha| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

つまり, $n \geqq N$ について

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

をみたし, 数列 $\{a_n\}$ は $\alpha$ に収束する □

これらの定理の述べていることをしっかり理解しておく．定理 2.5 は極限値を具体的に求められない数列においても, その数列がコーシー列であることさえ判明すれば, 収束することが保証されることを言っており, しかも, 定理 2.7 はその部分列の極限値さえ求められれば, もとの数列の極限値も求められることを言っている．

## 2.4 実数に収束する有理数列の存在

任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ において,

$$a_n \to \alpha \qquad (n \to \infty)$$

となるコーシー列が存在することは自明である．例えば, $\{\alpha\}$ や $\{\alpha + 1/n\}$ や $\{\alpha - 1/n\}$ など．実は, 公理 1.1 と 1.2 のもとでは, 任意の $\alpha$ に収束するコーシー列を有理数だけからなる数列で構成できる．

$\mathbb{Q}$ の元 (有理数) において, 次の定理が言えることは自明であるが, $\mathbb{Q}$ の元でない $\mathbb{R}$ の元 (無理数) においても公理 1.1 と 1.2 により次のことが言える．

**定理 2.8** (実数に収束する有理数列の存在)**.** 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ について

$$\lim_{n \to \infty} q_n = \alpha$$

をみたす有理数からなるコーシー列 $\{q_n\}$ が存在する．

(証明) 収束する数列はコーシー列であるので, $\alpha$ に収束する有理数列を作れば良い．

$$\alpha - 1 < \alpha < \alpha + 1$$

であるので, 数列 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を次のように帰納的に定義する．$b_1$ を $\alpha - 1 < b_1 < \alpha$ をみたす有理数, $c_1$ を $\alpha < c_1 < \alpha + 1$ をみたす有理数とする (公理 1.1 により, 条件をみたす有理数は必ず存在する)．第 2 項以降は $d_n = (b_n + c_n)/2$ の値により

$$b_{n+1} = \begin{cases} d_n & (d_n < \alpha \text{ のとき}) \\ b_n & (d_n \geqq \alpha \text{ のとき}) \end{cases}, \qquad c_{n+1} = \begin{cases} c_n & (d_n < \alpha \text{ のとき}) \\ d_n & (d_n \geqq \alpha \text{ のとき}) \end{cases} \tag{5}$$

とする．このとき $b_n, c_n, d_n \in \mathbb{Q}$ であり,

$$b_n \leqq \alpha \leqq c_n$$

により, $\{b_n\}$ も $\{c_n\}$ も ($\{d_n\}$ も) $\alpha$ に収束するコーシー列となる．よって, たとえば, $n \geqq 1$ について $q_n = b_n$ とすれば ($q_n = c_n$ でも $q_n = d_n$ でも構わない), 数列 $\{q_n\}$ が $\alpha$ に収束する有理数からなるコーシー列となる □

**注意 1.** 実数 $\alpha$ に収束する単調なコーシー列が存在することも分かる．証明における $\{b_n\}$ が単調増加, $\{c_n\}$

が単調減少のコーシー列である.

**注意 2.** 特に, 証明における数列 $\{b_n\}$ は

$$b_n \neq \alpha \qquad (n \in \mathbb{N})$$

をみたす.

**注意 3.** (5) において, 第 2 項以降の $b_n$, $c_n$ の決め方を

$$b_{n+1} = \begin{cases} d_n & (d_n \leqq \alpha \text{ のとき}) \\ b_n & (d_n > \alpha \text{ のとき}) \end{cases}, \qquad c_{n+1} = \begin{cases} c_n & (d_n \leqq \alpha \text{ のとき}) \\ d_n & (d_n > \alpha \text{ のとき}) \end{cases}$$

と変えても同様の結果が得られるが, このときは, 数列 $\{b_n\}$ の代わりに $\{c_n\}$ が

$$c_n \neq \alpha \qquad (n \in \mathbb{N})$$

をみたす.

## 2.5 同値なコーシー列

この節は, 難しいと思うなら読まずに先に進んで良い.

2 つのコーシー列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が同じ値に収束するとき, $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は **同値**であるといって,

$$\{a_n\} \sim \{b_n\}$$

と表す. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ のとき, $\forall\varepsilon > 0$ について

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon/2 \qquad (n \geqq N_a)$$

をみたす $N_a$ が存在する.

$\{a_n\} \sim \{b_n\}$ ならば

$$|b_n - \alpha| < \varepsilon/2 \qquad (n \geqq N_b)$$

をみたす $N_b$ が存在する. $N_0 = \max\{N_a, N_b\}$ とおくと $n \geqq N_0$ のとき

$$|a_n - b_n| \leqq |a_n - \alpha| + |\alpha - b_n| < \varepsilon$$

である.

逆に, $\forall\varepsilon > 0$ について

$$|a_n - b_n| < \varepsilon \qquad (n \geqq N)$$

をみたす $N$ が存在するとき,

$$|a_n - b_n| < \varepsilon/2 \qquad (n \geqq N_d)$$

をみたす $N_d$ が存在する. $N_1 = \max\{N_a, N_d\}$ とおくと $n \geqq N_1$ のとき,

$$|b_n - \alpha| \leqq |b_n - a_n| + |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ. よって, 次の命題が成り立つ.

**命題 2.9.** 2 つのコーシー列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について,

$$\begin{aligned} &\{a_n\} \sim \{b_n\} \\ &\iff \forall\varepsilon > 0 \text{ について } |a_n - b_n| < \varepsilon \ (n \geqq N) \text{ をみたす } N \text{ が存在する} \end{aligned}$$

また, 以下の命題が成り立つことも自明であろう.

**命題 2.10.** コーシー列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ について

(i) $\{a_n\} \sim \{a_n\}$
(ii) $\{a_n\} \sim \{b_n\} \Longrightarrow \{b_n\} \sim \{a_n\}$
(iii) $\{a_n\} \sim \{b_n\},\ \{b_n\} \sim \{c_n\} \Longrightarrow \{a_n\} \sim \{c_n\}$

が成り立つ.

**問題 2.3.** 命題 2.10 を示せ.

コーシー列 $\{a_n\}$ と同値なコーシー列全体の集合を $\big[\{a_n\}\big]$ で表し, この集合を $\{a_n\}$ の**同値類**という. すなわち

$$\big[\{a_n\}\big] = \big\{\{b_n\} \mid \{b_n\} \sim \{a_n\}\big\}$$

が $\{a_n\}$ の同値類である.

## 3 $\mathbb{Q}$ から $\mathbb{R}$

この世で最も原始的で「自然な数」と言えば, 個数などを表す自然数である. 整数や有理数も「自然な数」として可視的な数として扱うことができる. 例えば, 「貯金が $-100,000$ 円」や「リンゴが 1/2 個」と言っても不思議な顔をされない. ところが, 無理数と呼ばれる数は不自然な数である. 「$\sqrt{2}$ 個のキャベツ」を販売する店は (広い世界にはあるかもしれないが) 無いに等しい. そもそも, 無理数も含めた実数と呼ばれる数は, 「あれば便利な数」として用意されてきた数なのである. その意味では虚数と同じである. したがって, 厳密に実数を定義すると一見すると人工的な定義になってしまい, 原始的で自然な定義をすることは, 無意味になることが多い. 実数の扱いは, 有理数と同様に扱えるように工夫されているので, 定義を知らなくても, 実数の性質だけを知っておけば不利になることはない.

**定義 3.1** ($\mathbb{Q}$ におけるコーシー列)**.** $n \in \mathbb{N}$ について $a_n \in \mathbb{Q}$ であり, 任意の有理数 $r > 0$ について

$$|a_m - a_n| < r \qquad (m, n \geqq N)$$

をみたす $N$ が存在するとき, 数列 $\{a_n\}$ を $\mathbb{Q}$ におけるコーシー列という.

$\mathbb{Q}$ におけるコーシー列の全体を $S$ とおき, $S$ の $\sim$ における商集合, すなわち, $\mathbb{Q}$ におけるコーシー列の同値類全体の集合を $K$ とおく:

$$K = S/\!\sim = \Big\{\big[\{a_n\}\big], \big[\{b_n\}\big], \cdots\Big\}$$

である. 1 つの値に収束するコーシー列は $S$ の中に複数あるが, 1 つの値に収束するコーシー列の同値類は $K$ の中で唯一つとなる. さらに, $K$ の元のうち有理数に収束するコーシー列の同値類だけを集めたものを $K'(\subset K)$ とおけば, 写像

$$K' \ni \big[\{a_n\}\big] \longmapsto \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{Q}$$

により $K'$ は $\mathbb{Q}$ 全体に 1 対 1[*7] で対応する. したがって, $K'$ は $\mathbb{Q}$ と同一視でき, その意味で, $\mathbb{Q} \subset K$ と思える.

[*7] 1 対 1 の対応を実現するために同値類を元とする集合で考える. また, 同値類を元とすることで極限値の一意性も保証されることになる.

$K$ は絶対値による $\mathbb{Q}$ の完備化と呼ばれ, $K$ が $\mathbb{R}$ であり, $K$ の元が実数である.

「コーシー列 (の同値類)」が実数だという定義は, 「数」の集合が実数だと思って過ごしてきた我々には違和感があるかもしれない. しかし, 特に新しいことを述べているわけではない. 中学高校の数学において, $\sqrt{2}$ を $1.41421356\cdots$ として扱ってきた. これは, 実数 $\sqrt{2}$ を $\mathbb{Q}$ におけるコーシー列 $\{1, 1.4, 1.41, 1.4142, \cdots\}$ (の同値類) として扱うことと同じである.

### 3.1 コーシー列の極限の大小関係と和差積商

コーシー列が収束することは, 公理 1.2 で保証されているので, 収束する数列の性質はコーシー列においてももちろん成り立ち, $\mathbb{Q}$ におけるコーシー列 (定義 3.1) でも同様である.

**定理 3.2** (コーシー列の大小関係)**.** 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ のどちらもコーシー列であり,

$$a_n \leqq b_n \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

ならば

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqq \lim_{n\to\infty} b_n$$

が成り立つ.

**定理 3.3** (コーシー列の和差積商)**.** 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ のどちらもコーシー列であるとき, $\{a_n+b_n\}$, $\{a_n-b_n\}$, $\{a_nb_n\}$ はコーシー列である. さらに $\{b_n\}$ が 0 以外の実数に収束するならば, $\{a_n/b_n\}$ もコーシー列となる.

これらの性質は, 前節の $K$ における大小関係や演算を定義する際に重要となる. 実際, $K(=\mathbb{R})$ の元の大小関係は

$$a_n \leqq b_n \qquad (n \geqq N)$$

をみたす $N$ が存在するとき $\bigl[\{a_n\}\bigr] \leqq \bigl[\{b_n\}\bigr]$ と定義し, 和は

$$\bigl[\{a_n\}\bigr] + \bigl[\{b_n\}\bigr] = \bigl[\{a_n + b_n\}\bigr]$$

で, 積は

$$\bigl[\{a_n\}\bigr]\bigl[\{b_n\}\bigr] = \bigl[\{a_nb_n\}\bigr]$$

で定義する. 大小関係においては, 2 つの実数の平方根 (例えば $\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ など) の大小を調べるのに電卓で小数を求め ($\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ なら 1.414214 と 1.732051), その小数 (有理数) で大小を判定することと同じである.

これらの定義により, $K(=\mathbb{R})$ は順序体になり, 公理 1.1 と公理 1.2 をみたす集合となる.

## 4 $e$ と $\pi$

様々なことを述べてきたが, 要するに

> 「 ($\mathbb{Q}$ における) コーシー列の極限値」, 「($\mathbb{Q}$ における) コーシー列そのもの」, または, 「($\mathbb{Q}$ における) コーシー列の同値類」は実数である.

を理解しておくことが今後の役に立つ. 数学でよく登場する $e$ や $\pi$ なども実数として今まで取り扱ってきた. もちろん, それらの値に収束するコーシー列が存在する. $e$ は定義そのものであるし, $\pi$ に収束するコーシー列も存在することを紹介する.

## 4.1 ネイピア数 $e$

有理数

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ は, 2 項定理により, 単調増加であり, $n \geqq 2$ において

$$\frac{9}{4} \leqq a_n < 3$$

が成り立つことが分かる. したがって, 有界な単調数列なのでコーシー列である. よって,

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

と定義する. $e$ は**ネイピア数**[*8] と呼ばれる. 定義より $e \in \mathbb{R}$ である. なお, 上記の不等式により

$$2 < e \leqq 3$$

が成り立つ.

**問題 4.1.** 上記の数列 $\{a_n\}$ が単調増加であること, および $n \geqq 2$ において

$$\frac{9}{4} \leqq a_n < 3$$

が成り立つことを示せ.

$e$ の定義は上記の通りであるが, 具体的な値を求めることは不可能である. しかし, 関数 $e^x$ のテイラー展開を用いることにより近似値を求めることは可能である.

## 4.2 $\pi$ に収束するコーシー列

$\pi$ は円周率とも呼ばれる. 幾何学的には, 円におけるその円周の長さの直径に対するの比であり, 小数で表すと

$$3.14159265358979323846264338327 95 \cdots$$

となると習ったと思う. 直線ではなく, 曲線である円周の長さ[*9]はどう定義しているのだろうか? などの疑問は生じる. 実際, この定義から円周率を求める事は不可能であるし, 精度の高い近似値を求める事も出来ない. しかしながら, 結果的にはこの近似値は正しい.

解析学では, 幾何学的な直観にはよらない関数として, 三角関数を定義することが出来る[*10]. 特に関数 $\cos x$ が区間 $[0, 2]$ で狭義単調減少な連続関数であり, $\cos 0 > 0$ かつ $\cos 2 < 0$ であることにより, $\cos \alpha = 0$ をみたす実数 $\alpha$ が唯一つ存在することが分かる. そこで $\pi = 2\alpha$ と定義すれば, おなじみの円周率 $\pi$ が定義できる. つまり $\cos \pi/2 = 0$ という性質を用いて定義し直すのである.

[*8] この定義だけからは自明でないが, $e$ は自然対数の底として知られ, $(e^x)' = e^x$ となる. 高校数学で習った $e$ と定義は異なるが, 同じ値である.

[*9] 円周の長さは (直径)×(円周率) と, 安易に考えると循環論法になる.

[*10] 高校では幾何学的に円周上の点の座標として定義したが, べき級数を用いて定義し直すことが出来る.

同様にして, $\tan\pi/4 = 1$ を用いて $\pi$ を定義することも可能であるし, 理論上は, この性質を利用して $\pi$ の近似値を求めることも可能である. この性質を用いた関係式とは

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

であり, グレゴリー–ライプニッツの公式と呼ばれる. この等式の右辺がコーシー列であり, それを 4 倍すれば $\pi$ に収束するコーシー列になる.

次に紹介する偶数項, 奇数項の部分列に関する補題はよく使われる.

**補題 4.1.** 数列 $\{a_n\}$ の偶数番目の項だけからなる部分列 $\{a_{2m}\}$ と奇数番目の項だけからなる部分列 $\{a_{2m-1}\}$ のどちらもが同じ値 $\alpha$ に収束するとき, 元の数列 $\{a_n\}$ も $\alpha$ に収束する. すなわち

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{m\to\infty} a_{2m} = \alpha \\ \displaystyle\lim_{m\to\infty} a_{2m-1} = \alpha \end{cases} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

が成り立つ.

(証明) $\forall\varepsilon > 0$ について $\displaystyle\lim_{m\to\infty} a_{2m} = \alpha$ より

$$|a_{2m} - \alpha| < \varepsilon \qquad (m \geqq M_0)$$

をみたす $M_0$ が存在し, $\displaystyle\lim_{m\to\infty} a_{2m-1} = \alpha$ より

$$|a_{2m-1} - \alpha| < \varepsilon \qquad (m \geqq M_1)$$

をみたす $M_1$ も存在する. $N = \max\{2M_0, 2M_1 - 1\}$ とおくと, $n \geqq N$ のとき

$$n \geqq N \Longrightarrow \begin{cases} n \geqq 2M_0 \\ \quad \text{かつ} \\ n \geqq 2M_1 - 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} n/2 \geqq M_0 \\ \quad \text{かつ} \\ (n+1)/2 \geqq M_1 \end{cases}$$

である. 自然数 $n$ について $n \geqq N$ のとき, $n$ が偶数ならば, $m = n/2$ とすると $m \geqq M_0$ だから

$$|a_n - \alpha| = |a_{2m} - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立ち, $n$ が奇数ならば, $m = (n+1)/2$ とすると $m \geqq M_1$ だから

$$|a_n - \alpha| = |a_{2m-1} - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ. したがって $\forall\varepsilon > 0$ について

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon \qquad (n \geqq N)$$

をみたす $N$ が存在する. すなわち

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

である □

この補題を用いて, $n = 1, 2, 3, \cdots$ について

$$a_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ が収束することを示す.

$$a_{2m+2} = a_{2m} + \left(\frac{1}{4m+1} - \frac{1}{4m+3}\right) \geqq a_{2m}$$

だから, 部分列 $\{a_{2m}\}$ は単調増加である. また,

$$a_{2m} = 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \cdots + \left(\frac{1}{4m-5} - \frac{1}{4m-3}\right) - \frac{1}{4m-1} < 1$$

であり上に有界である. したがって $\{a_{2m}\}$ は収束する.

また

$$a_{2m-1} = a_{2m} - \frac{1}{4m-1}$$

で $m \to \infty$ のとき $1/(4m-1) \to 0$ だから, 部分列 $\{a_{2m-1}\}$ は $\{a_{2m}\}$ と同じ値 $\alpha$ に収束する. したがって, 補題 4.1 により, 数列 $\{a_n\}$ は収束し, したがって, コーシー列である. 最後に, このコーシー列 $\{a_n\}$ が $\pi/4$ に収束することを示す.

$0 \leqq x \leqq 1$ において

$$S_n = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{2(n-1)}$$

とおく. このとき

$$x^2 S_n = x^2 - x^4 + \cdots + (-1)^{n-2}x^{2(n-1)} + (-1)^{n-1}x^{2n}$$

であるので

$$(1+x^2)S_n = 1 + (-1)^{n-1}x^{2n}$$

よって

$$1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{2(n-1)} - \frac{1}{1+x^2} = (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{1+x^2}$$

が成り立つ. 両辺の $0 \leqq x \leqq 1$ における積分を考える. 左辺について

$$\int_0^1 (-1)^{k-1}x^{2(k-1)}dx = \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}, \qquad \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \left[\tan^{-1}x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$ [*11]

であることに注意すると

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{2(n-1)} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx \\
&= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} - \frac{\pi}{4} \\
&= a_n - \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

となり, これが右辺の $0 \leqq x \leqq 1$ における積分と等しいので

$$\begin{aligned}
\left|a_n - \frac{\pi}{4}\right| &= \left|\int_0^1 (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx\right| \\
&= \left|\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx\right| \\
&\leqq \left|\int_0^1 x^{2n}dx\right| = \frac{1}{2n+1}
\end{aligned}$$

[*11] $x = \tan\theta$ による置換積分を用いても同じ値が出る.

を得る．ここで

$$\frac{1}{2n+1} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

だから, $\forall \varepsilon > 0$ について

$$\frac{1}{2n+1} = \left| \frac{1}{2n+1} \right| < \varepsilon \qquad (n \geqq N)$$

をみたす $N$ が存在し, $n \geqq N$ について

$$\left| a_n - \frac{\pi}{4} \right| < \varepsilon$$

が成り立つ．したがって

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{\pi}{4}$$

となり, 数列 $\{4a_n\}$, すなわち $n = 1, 2, 3, \cdots$ について

$$q_n = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot 4}{2n-1} \in \mathbb{Q}$$

で定義される $\{q_n\}$ が $\pi$ に収束する ($\mathbb{Q}$ における) コーシー列である．

# 参考書籍

本文に登場する語句や証明, 考え方は次の書籍を参考にした．


| | | |
|---|---|---|
| 吹田信之 · 新保経彦 | 『理工系の微分積分学』 | (学術図書出版社) |
| 杉浦光夫 | 『基礎数学 2 解析入門 I』 | (東京大学出版会) |