関数の復習から合成関数まで

立命館大学理工学部数学学修相談会

2016 年 11 月 15 日 *

概要

中学校数学で学習した「関数」の復習から合成関数の考え方まで説明する. 特に, 合成関数の考え方は関数の微分法の一つとして重要であり, その応用としての置換積分を理解するために必要である.

話を簡単にするため, 実数変数で, 実数値をとる (1 価の) 関数[*1]について説明をする.

1 はじめに

実数全体を表す集合を $\mathbb{R}$ で表し, n 個の実数の組 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の全体を $\mathbb{R}^n$ で表す:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

例えば, $n = 1$ のときは

$$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$$

で, 数直線上の点の集まり, $n = 2$ のときは

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) | x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2\} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

で, 中学校で習った xy 平面上の点の集まりをイメージしてもらえばよいし, $n = 3$ のときは高校で習った xyz 空間上の点の集まりと思っておけば良い.

なお, 「条件」をみたす x の全体からなる集合を

$$\{x \mid 条件\ \}$$

と表し, 「条件$_1$」, 「条件$_2$」,$\cdots$, 「条件$_n$」全てをみたす x の全体からなる集合を

$$\{x \mid 条件_1, 条件_2, \cdots, 条件_n\}$$

と表す. 特に, 集合 S の部分集合であることを明示したい場合は

$$\{x \in S \mid 条件_1, 条件_2, \cdots, 条件_n\}$$

のように表す. 例えば, $0 \leqq x \leqq 1$ をみたす実数 x の集合 (つまり, 閉区間 $[0, 1]$) を

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqq x \leqq 1\}$$

で表す. ここで用いた変数 x は, 特に意味は無く, 条件も 2 つに分けて

$$\{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leqq y,\ y \leqq 1\}$$

としても同じ集合である.

---

* 執筆 平岡 由夫

[*1] x と y の関係において x に対応する y の値が 2 個以上あるときは多価関数といい, 最大 n 個の y があるときは n 価の関数という.

$\mathbb{R}^n$ の表記について

分野によっては, 上記と異なり, $\mathbb{R}^n$ を

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| \, x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

として, 議論をシンプルにすることもある. 以下の理論には大きな違いはないので, 古くからの解析学で用いられる記法を使う.

2 関数の復習

中学校, 高校で習った関数の復習をしておく. 今までどのように習ってきたのかを確認しておくことは, 大学での数学を理解する上で大事なことである.

2.1 関数 (中学校)

ある 1 つの値 x が決定されると, 他の値 y が**ただ 1 つ定まる**関係を

x と y は関数関係にある

または

y は x の関数である

という. y が x の関数のとき, x の値が a のとき y の値が b になることを, a は b に対応するという. 関数について考えるとき, 文字 x や y がいろいろな値をとることが一般であり, いろいろな値を取る文字のことを変数という.

2.2 関数 (高校)

いろいろな値を取る文字のことを変数といい, 2 つの変数 x, y があって, x の値を定めるとそれに対応して y の値が**ただ 1 つだけ定まる**とき,

y は x の関数である

という.

例 2.1. 1 分間に 0.5cm の割合で燃える長さ 15cm のろうそくに火をつけたとき, x 分後のろうそくの長さを y cm とすれば x と y の関係は,

$$y = 15 - 0.5x$$

と表される. この x と y の関係においては, x の値を定めたとき y の値がただ 1 つ定まるので, y は x の関数である.

例 2.2. x と y の関係が

$$x^2 + y^2 = 1$$

であったならば, y は x の関数ではない. なぜなら, x の値を 0 と定めても y の値が 1 と -1 の 2 つの値になってしまい, **ただ 1 つではない**からである.

例 2.3. $x \neq 1$ のとき, x と y の関係が

$$xy + x - y - 4 = 0$$

ならば y は x の関数である. なぜなら, 与えられた等式を変形すると ($x \neq 1$ において)

$$y = \frac{4-x}{x-1}$$

と変形出来, 右辺は x の値を定めるとただ 1 つの値が定まるからである.

2.3 関数の表し方 (高校)

一般に, y が x の関数であることを,

$$y = f(x)$$

のように書く. このとき, x の値 a に対応する y の値を $x = a$ における関数の値といい,

$$f(a)$$

で表す.

例えば, 上記の例 2.1 の関数 $y = 15 - 0.5x$ を $y = f(x)$ で表せば

$$f(x) = 15 - 0.5x$$

であり, また $x = 6$ における関数の値は

$$f(6) = 15 - 0.5 \times 6 = 12$$

となる.

また, 例 2.3 においては, 変形した左辺を

$$g(x) = \frac{4-x}{x-1}$$

とおけば, $y = g(x)$ と表すことが出来て, 例えば

$$g(2) = \frac{4-2}{2-1} = 2$$

となる.

練習問題 2.3

x と y が次の関係を満たすとき, y は x の関数であるか調べ, 関数であるときは $y = f(x)$ となる $f(x)$ を答えよ.

(1) $x = 2y + 2$
(2) $x + y^2 = 1$
(3) $x^2 + y = 1$
(4) $|x + 1| - y = 0$
(5) $x = \dfrac{3}{y-1}$ $(x \neq 0)$

3 関数

中学では x と y の関係として関数を定義し, 高校では $f(x)$ で関数を表すことを習う. (ただし, 関数と変数はセットになっていた. したがって「関数」ではなく,「x の関数」と表現する.) 大学では $f(x)$ ではなく, f を関数と考える. 例えば, $f(x) = 2x + 1$ と $g(t) = 2t + 1$ はどちらも与えられた値を 2 倍して 1 を加える対応なので, 同じ関数として扱い, $f = g$ とした方がすっきりする. 初等数学[*2]では高校で学習した関数の定義をもう少し拡張し, 今後の応用も考慮する.

3.1 1 変数関数の定義

実数 $\mathbb{R}$ の部分集合 D の任意の元に対して, 実数 $\mathbb{R}$ の元を**ただ 1 つ**定める対応 f を D で定義された関数と言う. 特に, f が D から $\mathbb{R}$ の部分集合 R への関数のとき

$$f : D \longrightarrow R \quad \text{または} \quad D \xrightarrow{\ f\ } R$$

と表す.[*3] 関数 $f : D \longrightarrow R$ は, D の任意の元 a を R のただ 1 つの元 b に対応させる. この b を f による a の像と言って, $b = f(a)$ と記し, この対応を

$$f : a \longmapsto b$$

と表す. [*4]

$\mathbb{R}$ の部分集合 D で定義された関数 f と g が, 任意の $a \in D$ について $f(a) = g(a)$ を満たすならば, f と g は同じ関数と決める.

大学での関数の定義には高校で習ったような変数 x や y が登場しないのがポイントである. 但し, f がどのような関数であるかを具体的に記述するためには, 高校で学んだ表記を用いる. 例えば与えられた実数を 2 倍し, それに 1 を加える関数 f は変数を用いて

$$f(x) = 2x + 1$$

と記すこともある. また, 上記の関数の定義により

$$f(t) = 2t + 1$$

と記しても, 関数としては同じということに注意する.

練習問題 3.1

$f(x) = 3x - 1$, $g(x) = 2x$ のとき次の像を答えよ.

(1) $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$
(2) $f(1 + 2)$
(3) $f(1 + a)$

[*2] 1 回生で扱う (それほど専門的でない) 数学
[*3] 本によってはこの D, R をそれぞれ f の定義域, 値域と呼ぶ場合がある. その場合は以下に登場する値域と R は同じとは限らない.
[*4] ここで登場した矢印は極限で登場した「近づく」とは全く異なる意味の記号である. 混合しないように注意すること. また, 集合の対応を表す矢印と元の対応を表す矢印は微妙に異なる.

(4) $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$
(5) $g(1+2)$
(6) $g(1+b)$

3.2 定義域と値域

例えば $g(x)=\dfrac{1}{x}+1$ や $h(x)=-\sqrt{x}$ のように, 一般に関数は全ての実数 x に対して意味を持っているわけではない. 例えば $g(x)$ は 0 以外の実数, $h(x)$ は 負でない実数でないといけない. 関数 $f(x)$ において $f(x)$ が意味を持つ x の範囲 (x の変域) を f の定義域という. また, x が定義域の値全てを取るときも $f(x)$ は全ての実数の値をとるわけではない. 例えば, 定義域を 0 でない実数全体としたときの $g(x)$ が実際にとる値は 1 以外の実数であるし, 定義域を負でない実数全体としたときの $h(x)$ は正でない実数である. 定義域 D の関数 $f(x)$ が実際にとる値の全体を $f(x)$ の値域 (ちいき) という:

$$\{f(x)\in\mathbb{R}\mid x\in D\}\quad(\text{値域})$$

注意 定義域について特に断りがなければ, $f(x)$ が意味を持つ x の全体を定義域とし, そのときの $f(x)$ のとる値全体を値域とする. また, 定義域も値域も $\mathbb{R}$ の部分集合であるので厳密には集合の記号を用いて表現する. そうすることにより変数の文字に捕らわれない表記が可能になる.

例 3.1. $f(x)=\sqrt{x-1}$ の定義域は $\{x\in\mathbb{R}\mid x\geqq 1\}$ であり (「$x\geqq 1$」と記述しても良い), 値域は $\{y\in\mathbb{R}\mid y\geqq 0\}$ (この場合は「$y\geqq 0$」では意味が分からないので例えば「$y=f(x)$ の定義域は $y\geqq 0$」と記述するなら良い) である.

例 3.2. $f(x)=x^2$ の定義域は $\mathbb{R}$ であり, 値域は $\{y\in\mathbb{R}\mid y\geqq 0\}$ である. $x\geqq 2$ で定義される $f(x)$ の値域は $\{y\in\mathbb{R}\mid y\geqq 4\}$ であるが, $x\geqq -2$ で定義される $f(x)$ の値域は $\{y\in\mathbb{R}\mid y\geqq 0\}$ である.

3.3 2 変数関数

x, y を実数とするとき, 式 x^2+y^2 のとる値を考えよう. $(x,y)=(0,0)$ (つまり $x=0$, $y=0$) のときは $0^2+0^2=0$ である. $(x,y)=(1,\sqrt{2})$ (つまり $x=1$, $y=\sqrt{2}$) のときは $1^2+(\sqrt{2})^2=3$ である. 一般に $z=x^2+y^2$ とおくと, 2 つの実数の組 (x,y) を定めると, 実数 z が**ただ 1 つ**に定まる. この (x,y) と z の対応を f を用いて表すと

$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$$

で

$$f:(0,0)\longmapsto 0,\qquad f:(1,\sqrt{2})\longmapsto 3$$

さらに

$$f:(x,y)\longmapsto x^2+y^2$$

となる.

一般に $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D の任意の元に対して, $\mathbb{R}$ の元を**ただ 1 つ**定める対応 f を D で定義された 2 変数 (実数値) 関数と言う. 特に, f が D から $\mathbb{R}$ の部分集合 R への関数のとき

$$f:D\longrightarrow R\quad\text{または}\quad D\xrightarrow{f}R$$

と表す. [*5] 関数 $f : D \longrightarrow R$ は, D の任意の元 (a_1, a_2) を R のただ 1 つの元 b に対応させる. この b を f による (a_1, a_2) の像と言って, $b = f(a_1, a_2)$ と記し, この対応を 1 変数のときと同様に

$$f : (a_1, a_2) \longmapsto b$$

と表す.

上記の (x, y) と z の関係 $z = x^2 + y^2$ は 2 変数関数 f を

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

と定めることにより

$$z = f(x, y)$$

と表記できることは, 1 変数関数と同様である.

練習問題 3.3

$f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y$ のとき次の像を答えよ.

(1) $f(0, 0)$, $f(1, 0)$, $f(0, 1)$
(2) $f(1 + 2, 1 - 1)$
(3) $f(1 + a, 1 - b)$

3.4 写像

2 変数関数の考えを, 一般にして, 「2 変数」を「n 変数」に拡張することは自然に出来る. [*6] 実は $\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^n$ に捕らわれず, 「関数」の考えを一般化し, 一般の集合における対応を考えることが今後必要となるので解説しておく.

集合 S, T があって, 集合 S の任意の元に対して, T の元をただ一つ定める対応 Φ を S から T への**写像** (しゃぞう) という. Φ が S から T への写像のとき

$$\Phi : S \longrightarrow T \quad \text{または} \quad S \xrightarrow{\Phi} T$$

と表記するのは関数のときと同様である. また, S の元 a が Φ により b に対応することを $b = \Phi(a)$ と表し, b を Φ による a の像といい,

$$\Phi : a \longmapsto b$$

と表記する. 例えば $\mathbb{R}^2$ の元 (x_1, x_2) が $\mathbb{R}^3$ の元 $(x_1 + 2, x_2 - 1, x_1x_2)$ に対応する写像を Φ とするとき, $(1, 2)$ の像は

$$\Phi(1, 2) = (1 + 2, 2 - 1, 1 \times 2) = (3, 1, 2)$$

である:

$$\Phi : (1, 2) \longmapsto (3, 1, 2).$$

特に集合 $\mathbb{R}^n$ から集合 $\mathbb{R}^m$ への写像は, m 個の n 変数関数 $f_1, f_2, \cdots, f_m$ を用いて

$$\Phi(x_1, \cdots, x_n) = (f_1(x_1, \cdots, x_n), f_2(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n))$$

[*5] D が $\mathbb{R}$ ではなく, $\mathbb{R}^2$ の部分集合であることに注意.
[*6] $\mathbb{R}^n$ の部分集合から $\mathbb{R}$ への関数とすれば良い.

と表すことが出来る. 実際, 上の $\mathbb{R}^2$ の元 (x_1, x_2) が $\mathbb{R}^3$ の元 (x_1+2, x_2-1, x_1x_2) に対応する写像 Φ は 3 個の 2 変数関数

$$f_1(x_1,x_2)=x_1+2,\quad f_2(x_1,x_2)=x_2-1,\quad f_3(x_1,x_2)=x_1x_2$$

を用いて

$$\Phi(x_1,x_2)=(f_1(x_1,x_2),f_2(x_1,x_2),f_3(x_1,x_2))$$

と表現できる.

3.5 媒介変数表示

媒介変数表示はパラメータ表示とも呼ばれ, 頻繁に登場する.

xy 平面上の曲線 C 上の点 (x,y) の座標が, 第 3 の変数 t により

$$\begin{cases} x=\varphi_1(t) \\ y=\varphi_2(t) \end{cases}$$

と表されているとき, これを曲線 C の t による媒介変数表示といい, t を媒介変数またはパラメータという.

$x=\varphi_1(t)$, $y=\varphi_2(t)$ から媒介変数 t を消去することができれば, x, y に関する曲線 C の関係式が得られる.

例えば, $\varphi_1(t)=2t$, $\varphi_2(t)=4t^2$ のときの媒介変数表示

$$\begin{cases} x=\varphi_1(t) \\ y=\varphi_2(t) \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} x=2t & \cdots & (1) \\ y=4t^2 & \cdots & (2) \end{cases}$$

を考えてみる. (1) より $t=\dfrac{x}{2}$ であり, これを (2) に代入して

$$y=x^2$$

よって与えられた媒介変数表示で得られる曲線 C は放物線である.

媒介変数表示とは $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^2$ への写像と考えれば良い. 例えば, 上記の媒介変数表示は写像 Φ

$$\Phi: t \longmapsto (\varphi_1(t),\varphi_2(t))$$

として扱うことが出来る.

また, t の変域 (=写像 Φ の定義域) を制限すると, 曲線全てではなく曲線の一部が表されることには注意しなくてはならない. 例えば, 上記の媒介変数表示で, $t>0$ と制限すれば, $x=2t>0$ となるので, 曲線 C は x 座標が正の部分だけの放物線となる.

また, 同じ曲線でも異なる媒介変数表示が存在する. たとえば, 上記の放物線 C は

$$\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases}$$

と表しても良い.

曲線の媒介変数表示において平行移動を扱うときは非常に易しくなる. 具体的には, 曲線 C が

$$\begin{cases} x=\varphi_1(t) \\ y=\varphi_2(t) \end{cases}$$

と表示されているとき, 曲線 C を x 軸方向に a, y 軸方向に b だけ平行移動した曲線は

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) + a \\ y = \varphi_2(t) + b \end{cases}$$

と表示される. たとえば, 上記の放物線 $y = x^2$ を x 軸方向に a, y 軸方向に b だけ平行移動した曲線は

$$\begin{cases} x = 2t + a \\ y = 4t^2 + b \end{cases}$$

または, もう一つの媒介変数表示を用いて

$$\begin{cases} x = t + a \\ y = t^2 + b \end{cases}$$

となる.

媒介変数表示に関しては, xyz 空間内の曲線を表示するのにも用いられるし, 媒介変数を複数用いる場合などもあるが, ここではこれ以上述べない.

練習問題 3.5

次の曲線を t による媒介変数表示

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \end{cases}$$

で表すとき, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ を答えよ.

(1) 2 点 (a_1, a_2), (b_1, b_2) を通る直線.
(2) 曲線 $x^2 + y^2 = 4$.
(3) 曲線 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$.

3.6 関数の定数倍, 和差積商

実数の定数倍, 和, 差, 積, 商はすべて実数である. したがって, 関数 $f(x)$, $g(x)$ についての $x = a$ における像 $f(a)$, $g(a)$ が実数である場合, その定数倍 $cf(a)$ (c は定数) や和 $f(a)+g(a)$, 差 $f(a)-g(a)$, 積 $f(a)g(a)$, 更に $g(a) \neq 0$ を満たす a においては商 $\dfrac{f(a)}{g(a)}$ も実数になる.

c を実数としたとき,

$$F(x) = cf(x)$$

と定義すると, F は一般には f と異なる新たな関数となる. 例えば $f(x) = 2x^2 - 3$, $c = -1$ のとき

$$F(x) = cf(x) = (-1)(2x^2 - 3) = -2x^2 + 3$$

は f とは異なる新しい関数である. このような $cf(x)$ を f の定数倍と呼ぶ.

同様に

$$G_1(x) = f(x) + g(x), G_2(x) = f(x) - g(x), G_3(x) = f(x)g(x)$$

も一般には f や g とは異なる新たな関数である. $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$ はそれぞれ $f(x)$ と $g(x)$ の和, 差, 積と呼ばれる. また, $g(x) \neq 0$ を満たす x においては

$$G_4(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

も一般には f や g と異なる新たな関数であり, $f(x)$ と $g(x)$ の商と呼ばれる.

定数倍, 和差積商にも変数に捕らわれない表記が存在し, それぞれ

$$cf, \quad f+g, \quad f-g, \quad fg, \quad f/g$$

と表記することがある. 例えば $f(x)=2x$, $g(x)=x-1$ のときは

$$\begin{aligned}(cf)(x) &= cf(x) &&= 2cx,\\ (f+g)(x) &= f(x)+g(x) &&= 3x-1,\\ (f-g)(x) &= f(x)-g(x) &&= x+1,\\ (fg)(x) &= f(x)g(x) &&= 2x^2-2x,\\ (f/g)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} &&= \frac{2x}{x-1}\end{aligned}$$

である.

1 変数に限らず, 2 変数関数においても定数倍や和差積商は定義される. 例えば

$$f(x,y)=2x^2+y, \qquad g(x,y)=x+2y^2$$

のとき

$$(cf)(x,y)=2cx^2+cy, \quad (f+g)(x,y)=2x^2+x+2y^2+y, \quad (fg)(x,y)=2x^3+4x^2y^2+xy+2y^3$$

である.

練習問題 3.6

$$f(x,y)=2x^2+y, \qquad g(x,y)=x+2y^2$$

のときそれらの差 $f-g$ および商 f/g を答えよ.

3.7 合成関数

合成関数を説明するために, まずは卵の話をする.

例 3.3. 2 つの店 A, B があり, 店 A に卵を預けると半年後には, 預けた卵の 2 倍の個数に加えおまけの 10 個の卵を返してくれる. 店 B に預けると同じく半年後に, 預けた卵の 3 倍の個数の卵を返してくれる. あなたが卵をそれぞれの店に半年ずつ預けた場合, 一年後に何個になるか考える.

(1) 1 個の卵を A, B の順に預けた場合. 半年後には $(2\times 1+10=)12$ 個で 1 年後には $(3\times 12=)36$ 個になる.
(2) 1 個の卵を B, A の順に預けた場合. 半年後には $(3\times 1=)3$ 個で 1 年後には $(2\times 3+10=)16$ 個になる.
(3) m 個の卵を A, B の順に預けた場合. 半年後には $(2m+10)$ 個で 1 年後には $(6m+30)$ 個になる.
(4) n 個の卵を B, A の順に預けた場合. 半年後には $3n$ 個で 1 年後には $(6n+10)$ 個になる.

それぞれの店に, 半年預けた場合, 預けた個数と返ってくる卵の個数の対応は次のようになる.

	預けた個数	返ってくる個数
店 A	m	$2m+10$
店 B	n	$3n$

今, $g(m) = 2m + 10$, $f(n) = 3n$ とおくと上の表は

	預けた個数	返ってくる個数
店 A	m	$g(m)$
店 B	n	$f(n)$

となる. 次に, それぞれの店に半年ずつ預け, 1 年後に返ってくる個数の対応を表にしてみると

	預けた個数	半年後の個数	一年後に返ってくる個数
A, B の順	m	$2m + 10$	$3(2m + 10) = 6m + 30$
B, A の順	n	$3n$	$2(3n) + 10 = 6n + 10$

になるが, これも, $f(n) = 3n$, $g(m) = 2m + 10$ を用いて書き換えてみると

$$3(2m + 10) = 3g(m) = f(g(m)), \quad 2(3n) + 10 = 2f(n) + 10 = g(f(n))$$

であるので

	預けた個数	半年後の個数	一年後に返ってくる個数
A, B の順	m	$g(m)$	$f(g(m))$
B, A の順	n	$f(n)$	$g(f(n))$

となる. この最右列に登場する $f(g(m))$ は m が決定するとただ一つの値が決まり, $g(f(n))$ については n が決定するとただ一つの値が決まることを意味している. これら $f(g(m))$ や $g(f(n))$ は合成関数と呼ばれるものである. もちろん, これらは f や g とは異なる新たな関数である.

1 変数関数 f, g について, 1 変数関数 $f \circ g$ を

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

と定義し, f と g の合成関数という.

例えば $f(x) = 3x$, $g(x) = 2x + 10$ のとき

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x + 10) = 3(2x + 10) = 6x + 30$$

であり, もちろん

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(3x) = 2(3x) + 10 = 6x + 10$$

とは異なるので注意すること.

1 変数関数の合成関数の考えは, 多変数関数や写像にも拡張できる. 例えば, 写像 Φ, Ψ の合成写像 $\Phi \circ \Psi$ を

$$\Phi \circ \Psi(x) = \Phi(\Psi(x))$$

と定義する.[*7]

練習問題 3.7

(1) $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = 5x + 2$ のとき合成関数 $f \circ g$ および $g \circ f$ を答えよ.

(2) $f(x) = \cos x$, $g(x) = x^3$ のとき, 合成関数 $f \circ g$ および $g \circ f$ を答えよ.

(3) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x + \dfrac{\pi}{2}$ のとき, 合成関数 $f \circ g$ を答えよ.

[*7] 合成写像 $\Phi \circ \Psi$ を $\Phi \circ \Psi(x) = \Psi(\Phi(x))$ と定義する場合もある.

参考書籍

本文に登場する語句, 記号, 問題は次の書籍を参考にした.

荒井正治	『理工系 微積分学 – 第 3 版 – 』	(学術図書出版社)
下村宏彰 · 三上俊介	『新装版 微分積分学』	(学術図書出版)
吹田信之 · 新保経彦	『理工系の微分積分学』	(学術図書出版社)

練習問題解答

2.3

(1) $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 1$
(2) y は x の関数でない.
(3) $f(x) = -x^2 + 1$
(4) $f(x) = |x + 1|$
(5) $f(x) = \dfrac{3}{x} + 1$

3.1

(1) $f(0) = -1,\ f(1) = 2,\ f(2) = 5$
(2) $f(1 + 2) = f(3) = 8$
注意 $f(1) + f(2)$ ではない. $1 + 2(= 3)$ が f によりどんな実数に対応するのか

$$f : 1 + 2 \longmapsto ?$$

を考える.
(3) $f(1 + a) = 3(1 + a) - 1 = 3a + 2$
(4) $g(0) = 0,\ g(1) = 2,\ g(2) = 4$
(5) $g(1 + 2) = g(3) = 6$
(6) $g(1 + b) = 2(1 + b) = 2b + 2$

3.3

(1) $f(0, 0) = 0,\ f(1, 0) = 1,\ f(0, 1) = 3$
(2) $f(1 + 2, 1 - 1) = f(3, 0) = 9$
注意 $(1 + 2, 1 - 1)(= (3, 0))$ が f によりどんな実数に対応するのか

$$f : (1 + 2, 1 - 1) \longmapsto ?$$

を考える.
(3) $f(1 + a, 1 - b) = (1 + a)^2 - 2(1 + a)(1 - b) + 3(1 - b) = a^2 + 2ab - b + 2$

3.5

(1) 例えば $\varphi_1(t) = (1 - t)a_1 + tb_1,\ \varphi_2(t) = (1 - t)a_2 + tb_2$
(2) 例えば $\varphi_1(t) = 2\cos t,\ \varphi_2(t) = 2\sin t$
(3) 例えば $\varphi_1(t) = 2\cos t + 1,\ \varphi_2(t) = 2\sin t - 2$

解答は上記以外にも存在する.

3.6

$$(f-g)(x,y) = 2x^2 - x - 2y^2 + y, \qquad (f/g)(x,y) = \frac{2x^2+y}{x+2y^2}$$

3.7

(1) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(5x+2) = 2(5x+2)+5 = 10x+9,$
$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x+5) = 5(2x+5)+2 = 10x+27$
(2) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^3) = \cos(x^3),$
$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\cos x) = (\cos x)^3 = \cos^3 x$
(3) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$