

存在について

立命館大学工学部数学学修相談会

2017年9月23日*

概要

高校までの数学では解法を重視し、存在性について考察することは皆無である。大学の数学では、論理を正しくするために存在性についても細かく考察する。また、具体的な解や値が明示できなくても、存在性の確認のみで議論を進めていくことがある。存在の確認の必要性や、存在が確認できたことにより、具体的な値を算出できる例を述べる。

1 はじめに

高校までの数学は問題の解や条件を満たす値を求めるときに、その解や値の有無について、考慮することはほとんど無かった。なぜなら、それらの解や値が直接求められるように、あらかじめ問題が設定されていることが多いからである。ところが、具体的に解や値を求められなくても解や値の存在を示すことが可能なきもあり、存在が確認できれば、そのことから必要な解や値へのアプローチする方法もある。例えば微分積分学において

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

の値を求める方法などがある。 t を任意の正の実数とすると、閉区間 $[0, t]$ において e^{-x^2} は連続であるので、閉区間 $[0, t]$ において $f'(x) = e^{-x^2}$ をみたす $f(x)$ が存在することは分かるが、残念ながら $f(x)$ を簡単に求めることは出来ない。ところが、 I が存在すること、 I^2 が求められることから I の具体的な値を求めることができる。この方法は、直接に値を求めることを主目的とする高校の数学より、高度で重要であると言える。実際、

$$f(t) = \int_0^t e^{-x^2} dx$$

が具体的に分からなくても I が求まる。数列においても第 n 項 a_n を n で明記することが困難でも、極限の存在さえ保証されていれば $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が求まることがある。

解の候補を見つけただけで、解が存在すると誤解してしまうことがよくあり、高校までの数学で学んだ解法も、実はその解法の背景には解の存在が保証されていることを知っておくべきである。また、今後の学修で、具体的に解や値を求めにくいときでも、存在を示しておくだけで理論を進めることが頻繁に登場する。以下、存在の確認の必要性と簡単な応用を説明する。

2 存在を考慮することの必要性

存在の確認を怠ったことが理由で間違った結論を出してしまう例をあげる。

* 執筆 平岡由夫

例 2.1. くじに当選したのは誰?

「A, B, C からなる 3 人グループの 1 人にくじが当選したとの噂があり, 調べたところ, A はくじの発売を知らず購入しておらず, B はくじを購入したが, すべて C に譲ったことが分かった. くじに当選したのは誰か?」

(解) A と B はくじを持っていないのだから C が当選した.

例 2.2. 数列の極限值

「 $a_1 = -1, a_{n+1} = -a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ についてその極限を求めよ。」

(解) 求める極限を α とおく. つまり, $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ とする. このとき, 数列の極限の性質より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \alpha$$

であり, $a_{n+1} = -a_n$ だから α は

$$\alpha = -\alpha$$

を満たす. よって $\alpha = 0$ に限る. つまり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

である.

どちらの結論も正しくはない. 例 2.1 におけるくじの当選については噂が真実でない (つまり当選者が存在しない) 可能性もあり, だれも当選していないかもしれない. 例 2.2 に関してはこの数列は

$$a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, \dots$$

で一般項は $a_n = (-1)^n$ であり, 発散する. つまり, 0 に収束しないので間違っている. 間違った原因は, 極限值が存在しないかもしれないのに, 安易に

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

とおいてしまったことにある. つまり, どちらについてもくじの当選者や極限値の「存在」の確認を無視して結論づけしてしまったことにある. では次の例はどうであろう.

例 2.3. 極限值は正しいけれど

「 $b_1 = \frac{1}{2}, b_{n+1} = \frac{1+b_n}{4} (n = 1, 2, 3, \dots)$ で定まる数列 $\{b_n\}$ についてその極限値を求めよ。」

(解) 数列に極限值 x が存在すると仮定すると,

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1}$$

より, x は方程式

$$x = \frac{1+x}{4}$$

を満たす. これには解があり, 実際に解くと

$$x = \frac{1}{3}$$

を得る. 確かに極限 x が求まったので極限值が存在するという仮定は正しいと言える. したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{3}$$

である.

実際、極限値は正しい値*1 であるが、論法がでたらめであることは前の例と同じである。x に関する方程式に解が存在することと、極限値が存在することが同値であると思っ込んでいる。もちろん同値ではないことは前の例でも分かる。例 2.1 も 例 2.3 も「存在」を示されなければ、結論が正しいとは言えないのである。存在を示すことを無視できないことを理解してもらえたらうか。

3 存在性から具体的な値を求める

実数列*2の極限値の存在を示すのに、実数の性質を用いることがある。この性質は高校の数学では学ばない。数列 $\{a_n\}$ が、

$$a_n \leq a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとき、その数列を単調増加数列、

$$a_n \geq a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすときは、単調減少数列という。例えば、例 2.3 の数列は単調減少数列である。また、単調増加または単調減少数列を総称して単に単調数列という。例 2.2 の数列は単調数列ではない。

数列 $\{a_n\}$ について、

$$a_n < M \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たす定数 M が存在するとき、その数列は上に有界、

$$M < a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たす定数 M が存在するときは、下に有界という。また、上にも下にも有界な数列を有界数列という。例えば、例 2.2 および例 2.3 の数列は有界数列である。

実数の性質より実数列において次の定理を得る。

定理 3.1. 上に有界な単調増加数列は収束する。

この定理は高校では習わない。また、この定理から以下の 2 つの系を得る。

系 3.2. 下に有界な単調減少数列は収束する。

系 3.3. 有界な単調数列は収束する。

例 2.3 の数列に極限値が存在することは系 3.2 から分かる。それは自分で考えて欲しい。ここでは、別の数列の極限値を求めてみる。

例題 1. $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ。

(解) (I) $n = 1, 2, 3, \dots$ について

$$a_n > 0 \quad \dots \quad (*)$$

が成り立つことを示す。

(i) $n = 1$ のとき $a_1 = 1 > 0$ より (*) は成り立つ。

*1 $\varepsilon - N$ 論法で、数列の極限の定義を満たすことを確認すれば、極限値 $\frac{1}{3}$ が分かる。

*2 実数の項からなる数列のことで、「数列」といえば暗黙の了解で実数列を意味することが多い。なお、複素数の項からなる数列は複素数列という。

(ii) $n = k$ のとき (*) が成り立つと仮定すると, $a_k + 1 > 0$ であるので

$$a_{k+1} = \sqrt{a_k + 1} > 0$$

である. したがって $n = k + 1$ においても (*) が成り立つ.

以上 (i), (ii) より

$$a_n > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である.

(II) 数列 $\{a_n\}$ は単調増加数列であることを示す. そのために $n = 1, 2, 3, \dots$ について

$$a_{n+1} - a_n \geq 0 \quad \dots \quad (**)$$

が成り立つことを示す.

(i) $n = 1$ のとき $a_2 - a_1 = \sqrt{2} - 1 \geq 0$ だから (**) が成り立つ.

(ii) $n = k$ のとき (**), すなわち $a_{k+1} - a_k \geq 0$ が成り立つと仮定すると, (I) より $\sqrt{a_{k+1} + 1} + \sqrt{a_k + 1} > 0$ だから*3

$$\begin{aligned} a_{k+2} - a_{k+1} &= \sqrt{a_{k+1} + 1} - \sqrt{a_k + 1} \\ &= \frac{a_{k+1} - a_k}{\sqrt{a_{k+1} + 1} + \sqrt{a_k + 1}} \geq 0 \end{aligned}$$

なので, $n = k + 1$ のときも (**) が成り立つ.

以上 (i), (ii) より

$$a_{n+1} - a_n \geq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

であり, したがって $n = 1, 2, 3, \dots$ について $a_n \leq a_{n+1}$ が成り立ち, 数列 $\{a_n\}$ は単調増加数列である.

(III) 数列 $\{a_n\}$ が上に有界であること, 特に $n = 1, 2, 3, \dots$ において

$$a_n < 3 \quad \dots \quad (***)$$

が成り立つことを示す.

(i) $n = 1$ のとき $a_1 = 1 < 3$ だから (***) は成り立つ.

(ii) $n = k$ のとき (***) が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} 3 - a_{k+1} &= 3 - \sqrt{a_k + 1} \\ &= \frac{8 - a_k}{3 + \sqrt{a_k + 1}} > 0 \end{aligned}$$

だから $n = k + 1$ のときも (***) が成り立つ.

以上 (i), (ii) より

$$a_n < 3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立ち, 数列 $\{a_n\}$ は上に有界である.

(II), (III) により数列 $\{a_n\}$ は上に有界な単調増加数列であるので収束する. そこで, その極限値を α とおく. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \alpha$ であり, $\alpha + 1 > 0$ であるので*4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_{n+1} + 1} = \sqrt{\alpha + 1}$$

*3 $\sqrt{a_{k+1} + 1} + \sqrt{a_k + 1} = 0$ のときはこの変形はできない.

*4 はさみうちの原理を用いると, 数列 $\{a_n\}$ について $a_n > 0$ であり, $\alpha > 0$ に収束するならば $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\alpha}$ が成り立つことが分かる.(高校の数学の教科書には公式として載っているが厳密な証明はない)

に注意すると α は

$$\alpha = \sqrt{\alpha + 1}$$

を満たさなければならない. このとき両辺を 2 乗して

$$\alpha^2 = \alpha + 1 \iff \alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

より

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ または } \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

に限る. ところが, (I) により $0 \leq \alpha$ であるので

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

でなければならない. したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

を得る.

参考書籍

本文に登場する語句, 記号, 問題は次の書籍を参考にした.

荒井正治 『理工系 微積分学 - 第 3 版 - 』 (学術図書出版社)