sup と inf (ε-δ 入門 4)

立命館大学理工学部数学学修相談会

2018 年 1 月 9 日 *

概要

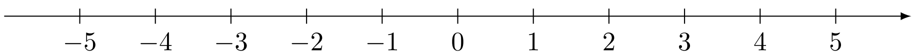
ε-δ 論法とならんで, 上界, 下界, 上限, 下限 という言葉や sup や inf の記号は大学で初めて目にし, たいていの教科書では前の方に登場する. 初めて目にするので難しいと感じてしまい, 大学の微分積分の講義でつまずく者が多い.

上界と下界, 上限と下限をイメージを持ってもらえるように解説し, 実数の連続公理との関係を説明する. 説明の際, 数直線の存在を仮定して説明する. このことは数学的には一種の「ごまかし」であるかもしれないが, 有用な「ごまかし」としてご容赦願いたい.

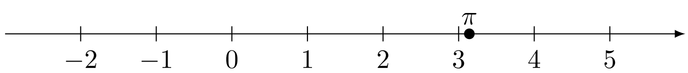
目次

1 はじめに

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す. $\mathbb{R}$ の任意の元は全て数直線

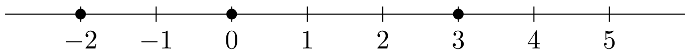


に描画される. 例えば $\pi(\in \mathbb{R})$ を描画すると

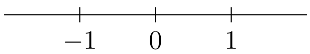


* 執筆 平岡由夫

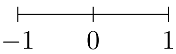
となる．上記のように π の一点を描画を示したければ, 数直線の一部を用意しておくだけで良い．$\mathbb{R}$ の部分集合 $\{-2, 0, 3\}$ の元全てを描画したければ数直線の一部を用意して



とできる．ところが, 実数全て (すなわち $\mathbb{R}$) を描画するためには, どれだけ長い数直線を用意しても不可能である．これは $\mathbb{R}$ の元の個数が無限に多いというのが真の理由ではない．例えば, 閉区間 $[-1, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqq x \leqq 1\}$ の元の個数は有限個ではないが数直線の一部

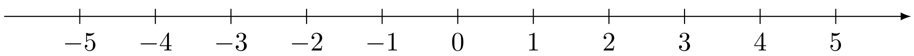


を用意しておけば, $[-1, 1]$ の元を全て描画できる．さらに, 用意する数直線をぎりぎりまで短くしたければ,

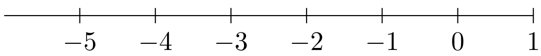


で十分であり, これより短くすることは出来ず, 最短の数直線となる．開区間 $(-1, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ についても上記と同じ数直線が最短となる．閉集合 $[-1, 1]$ に -1 と 1 は含まれるが, 開集合 $(-1, 1)$ には含まれない．しかしながら, 用意する最短の数直線は同じであり右端の座標は 1, 左端の座標は -1 となる．実は, $\mathbb{R}$ の部分集合 A の元を全て描画するのに必要な最短の数直線がただ 1 つに定まるならその右端の座標を上限といい $\sup A$ で表し, 左端の座標を下限といって $\inf A$ で表すのである．例えば $\sup[-1, 1] = \sup(-1, 1) = 1$, $\inf[-1, 1] = \inf(-1, 1) = -1$ である．

sup や inf のイメージとしては上述の通りであるが, 「最短」という言葉は厳密ではない．実は, 区間 $(-\infty, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqq 1\}$ や $(-\infty, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$ のように下限は定まらないが上限のみ定まるときもある．どこまでも続く数直線



と, 区間 $(-\infty, 1]$ や $(-\infty, 1)$ の全ての元を描画できる左はどこまでも続く数直線



はどちらについても長さが定まらないので, どちらが短いかを決めることは厳密には不可能である．上記の数直線を見ると下の数直線の方が短く見えるが誤解である．ここで述べた「最短」とは描画するのには不要である部分を可能な限り取り除いた, ひとかたまりの数直線という意味である．また, $\mathbb{R}$ の部分集合として, 空集合がある．空集合の元を全て描画するような数直線を唯一つに定めることは出来ない．つまり, 空集合の上限や下限は定義されない．実は定義域や値域が空集合となる関数は考察しないので, 空集合の上限や下限は定義しなくても良いのである．なお, 「空集合でない $\mathbb{R}$ の部分集合」という条件は頻繁に登場する．また, 数直線を用いた上述の説明はあくまでもイメージであるので, 厳密には後述する定義も理解しなくてはならない．

我々は $\mathbb{R}$ を (四則演算が定義されて, 2 つの実数には普通の大小関係が決まるような) 以下の 2 つの公理が成り立つ集合とする．

公理 1.1 (実数の完備性)**.** $\mathbb{R}$ における全てのコーシー列は収束する．

公理 1.2 (アルキメデスの原理)**.** 任意の実数 $a > 0, b > 0$ について

$$a < Nb$$

となる自然数 N が存在する.

公理 1.2 から以下の 2 つの定理が導かれることは以前示した.

定理 1.3 ($\mathbb{Q}$ の $\mathbb{R}$ における稠密性)**.** 任意の $\varepsilon > 0$ について, いかなる実数 a についても

$$|a - q| < \varepsilon$$

をみたす有理数 q が存在する.

定理 1.4.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

である.

2 最大元と最小元

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合 A について,

i) $M \in A$
ii) 任意の $a \in A$ に対し, $a \leqq M$

をみたす M を A の**最大元**といい,

i) $m \in A$
ii) 任意の $a \in A$ に対し, $m \leqq a$

をみたす m を A の**最小元**という. 最大元の条件 ii) は

「$M < x$ をみたす任意の実数 x は A の元でない」

と置き換えても良いので

ii)′ 任意の $\varepsilon > 0$ について $M + \varepsilon \notin A$

と置き換えても良い. 同様に最小元の条件 ii) も

ii)′ 任意の $\varepsilon > 0$ について $m - \varepsilon \notin A$

と置き換えても良い.

なお, 空集合 $\emptyset$ については i) が成り立たないので最大元も最小元も存在しない. このように A について最大元, 最小元が存在するとは限らないが, 存在するならば唯一つに限る[*1]. そこで, A の最大元, 最小元が存在するならば, それぞれ

$$\max A, \qquad \min A$$

[*1] 例えば最大元が M と M' の 2 つ存在したとすると M は最大元なので $M' \leqq M$ が成り立ち, 同様に M' も最大元なので $M \leqq M'$ が成り立つ. したがって $M = M'$ でなければならない.

で表す. 空集合でない A が有限個の元からなる集合ならば

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$$

とし, $M = a_1$ とおく. 次に, 操作

$$M < a_k \text{ ならば } M = a_k \text{と置き換える.}$$

を $k = 2, 3, \cdots, n$ について行えば, M は A の最大元となる. 最小元も同様の操作で得られるので, 次の定理を得る.

定理 2.1. 空集合でない有限個の元からなる $\mathbb{R}$ の部分集合には最大元と最小元が存在する.

元の個数が有限でない場合で最大元や最小元を求めたい場合, 上記の方法が通用しない. 一般的に求める方法は存在せず, 直観的に発見することが多い. 次の例においても, 計算やなんらかの操作で求めているのではなく, 定義の意味と与えられた集合の性質から発見していることに注意して欲しい. 実際は「この値で上手くいくのではないか」とあたりをつけて, 定義をみたすか確認しているのである.

$A = (-\infty, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqq 1\}$ や $A' = (-1, 1] = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x \leqq 1\}$ には最大元 1 が存在するが最小元は存在しない. 1 が最大元であることは定義により確かめられる. A に最小元が存在しないのは, 任意の実数 m について $a < m$ となる $a \in A$ が存在する[*2]ので ii) をみたす m は存在しないからであるし, A' の最小元 m が存在したと仮定すると, $m > -1$ なら, $-1 < a < m$ となる $a \in A'$ が存在する[*3]ので矛盾し, $m \leqq -1$ だとすると, m は A' の元でないので矛盾する. したがって A' にも最小元は存在しない.

同様に, $[-1, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqq x\}$ や $[-1, 1) = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leqq x < 1\}$ には最小元が存在するが最大元は存在しない. また, $\mathbb{R}$ や $(-1, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ には最大元と最小元のどちらも存在しない.

問題 2.1. $A = [-1, 0) \cup (1, 2]$ の最大元, 最小元を答えよ.

問題 2.2. $B = (-2, 1] \cap [-1, 2)$ の最大元, 最小元を答えよ.

問題 2.3. $C = \{0\}$ の最大元, 最小元を答えよ.

高校数学で学んだ 1 変数関数の最大値, 最小値は次のように考えれば良い.

$\mathbb{R}$ の部分集合 D で定義された実数値関数 $f(x)$ について, $f(x)$ の値域を A とおく. すなわち

$$A = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in D\}$$

とおくと A は $\mathbb{R}$ の部分集合であり, D における f の最大値とは A の最大元, 最小値とは A の最小元のことである.

3 上界と下界

$\mathbb{R}$ の部分集合 A について, $b \in \mathbb{R}$ が, 任意の $a \in A$ について

$$a \leqq b$$

をみたすとき, b は A の**上界** (upper bound) であるといい, $c \in \mathbb{R}$ が, 任意の $a \in A$ について

$$c \leqq a$$

[*2] アルキメデスの原理による

[*3] これもアルキメデスの原理による

をみたすとき, c は A の**下界** (lower bound) であるという.

例えば $A=(-1,1)$ のとき 2 は A の上界であるし, -1 は A の下界である. また, 上界や下界となる実数が存在しないこともあるし, 存在したとしても唯一つではない[*4]. 例えば $\mathbb{R}$ には上界となる実数も下界となる実数も存在しないし, $A=(-1,1)$ のとき 1 も 2 も 3 もすべて A の上界である. また, 空集合 $\emptyset$ においては全ての実数が上界, 下界になる. 一般に b が A の上界であるとき, $x \geqq b$ となる実数 x は任意の $a \in A$ について

$$a \leqq b \leqq x$$

をみたすので,

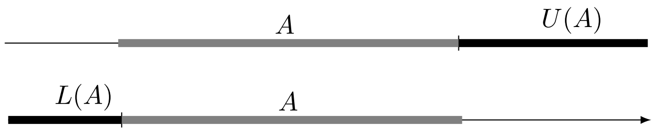
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqq b\}$$

の元はすべて A の上界であるし, 下界に関しても同様のことが言える. 上界または下界となる実数が存在したとき, それらは唯一つではないのでそれらをまとめた集合を定義しておくと便利である.

$\mathbb{R}$ の部分集合 A について A の上界全体の集合を $U(A)$, 下界全体の集合を $L(A)$ と記す. すなわち

$$U(A)=\{b \in \mathbb{R} \mid a \leqq b, \forall a \in A\},\ L(A)=\{c \in \mathbb{R} \mid c \leqq a, \forall a \in A\}$$

である.



例えば $A=(-1,1)$ のとき

$$U(A)=[1,\infty), \qquad L(A)=(-\infty,-1]$$

であるし, A が $[-1,1]$ や $[-1,1)$ や $(-1,1]$ であっても全く同じとなる.

次の定理とその系は自明であろう.

定理 3.1. $\mathbb{R}$ の部分集合 A について A に最大元 M が存在すれば, M は A の上界であり, 最小元 m が存在すれば, m は A の下界である.

系 3.2. $\mathbb{R}$ の部分集合 A について A に最大元が存在すれば $U(A) \neq \emptyset$, 最小元が存在すれば $L(A) \neq \emptyset$ である.

系 3.3. $\mathbb{R}$ の部分集合 A について $U(A)=\emptyset$ ならば A に最大元は存在しないし, $L(A)=\emptyset$ ならば A に最小元は存在しない.

注意 上記の系を「$U(A) \neq \emptyset$ ならば A に最大元が存在する」と間違ってはいけない. 例えば $A=(-1,1)$ のとき, $U(A)=[1,\infty) \neq \emptyset$ であるが A に最大元は存在しない.

A の上界とは, A の全ての元を図示する最短の数直線を求める過程で, 切り取って良い右側の座標の一つを意味し, 下界とは切り取って良い左側の座標を意味する.

[*4] 最大元に関しては存在すれば唯一つであった. 上界に関しても唯一つだと勘違いしてはいけない

ならば

で A 全ての元を図示できる．したがって, $U(A)$ の最小の値と $L(A)$ の最大の値が, A の全ての元を図示できる最短の数直線の左右の座標になっていると考えられる．

4 有界

数列でも登場した「有界」の定義を拡張して, $\mathbb{R}$ の部分集合においても定義できる．

$\mathbb{R}$ の部分集合 A において $U(A) \neq \emptyset$ のとき A は**上に有界**であるといい, $L(A) \neq \emptyset$ のときは**下に有界**であるという．$U(A) \neq \emptyset$ のとき $b \in U(A)$ となる元 b が存在し, このとき, A の任意の元 a について

$$a \leqq b$$

をみたすので, A が上に有界であるならば, A の任意の元 a について $a \leqq b$ となる (a によらない) 定数 b が存在する．逆に, A の任意の元 a について $a \leqq b$ となる (a によらない) 定数 b が存在したならば, b は A の上界であるので, $U(A) \neq \emptyset$ となる．下に有界な場合についても同様で上界や下界について記述されていない教科書にあるように (具体的には次のように) 言い換えることが出来る．

定理 4.1. A が $\mathbb{R}$ の部分集合であるとき,

A が上に有界である $\iff$ A の任意の元 a について $a \leqq b$ をみたす (a によらない) 定数 b が存在する

であり,

A が下に有界である $\iff$ A の任意の元 a について $c \leqq a$ をみたす (a によらない) 定数 c が存在する

である．

また, 上にも下にも有界である場合は単に**有界**であるという．

数列 $\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ における有界は $\mathbb{R}$ の部分集合

$$A = \{a_n \in \mathbb{R} \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$$

で定義されていると考えれば良い．つまり, 集合 A が上に有界の時, 数列 $\{a_n\}$ は上に有界, 集合 A が下に有界の時, 数列 $\{a_n\}$ は下に有界というのである．

注意 数列 $\{a_n\}$ と集合 $\{a_n \in \mathbb{R} \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$ は異なる．例えば $a_n = (-1)^n$ のとき数列 $\{a_n\}$ とは

$$\{-1, 1, -1, 1, \cdots\}$$

と順も考慮した無限個の項から構成されるものを意味するが, 集合 $\{a_n \in \mathbb{R} \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$ とは

$$\{-1, 1\}$$

のことであり, 2 つの元だけで構成される集合である．このように数列と集合の混乱を避けるために数列 $\{a_n\}$ を

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \cdots)$$

と記述することもある．

5 上限と下限

$\mathbb{R}$ の部分集合 A について, $U(A)$ の最小元, $L(A)$ の最大元について考察する. $A=\emptyset$ のときは

$$U(A)=L(A)=\mathbb{R}$$

となり, $U(A)$ も $L(A)$ も空集合ではないが, 最大元や最小元は存在しない. 一方, $A\neq\emptyset$ においては, 実数の連続性が大きく関わってくる.

補題 5.1. 集合 A が $\mathbb{R}$ の部分集合であり, 空集合でないとする. このとき $U(A)\neq\emptyset$ ならば $U(A)$ には最小元が存在する.

証明. $B=U(A)$ とし, C を $U(A)$ の $\mathbb{R}$ における補集合とする. $a\in A(\neq\emptyset)$ に対し, $a-1<a$ であるので, $a-1\notin U(A)=B$ である. すなわち, $a-1\in C$ だから $C\neq\emptyset$ である.

また, C の任意の元は A の上界にはならない. 何故なら, A の任意の元 a について $a\leqq c$ をみたす C の元 c があったとすると c が A の上界になってしまうからである. 言い換えれば, C の任意の元 c について $a>c$ をみたす A の元 a が必ず存在する. さらに $a\in A$ と $b\in B$ の間には, $a\leqq b$ がいつでも成り立つので, 任意の $c\in C, b\in B$ に対し

$$c<a\leqq b$$

をみたす $a\in A$ が必ず存在する.

数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ を次のように定義する :
$b_1\in B$, $c_1\in C$ を任意に選ぶ, 第 2 項以降は $d_n=(b_n+c_n)/2$ の値により

$$b_{n+1}=\begin{cases} d_n & (d_n\in B)\\ b_n & (d_n\in C)\end{cases}\quad,\quad c_{n+1}=\begin{cases} c_n & (d_n\in B)\\ d_n & (d_n\in C)\end{cases}$$

と決める. (つまり,

のときは $c_{n+1}=c_n$, $b_{n+1}=d_n$,

のときは $c_{n+1}=d_n$, $b_{n+1}=b_n$ とする. どちらの場合にも $b_{n+1}-c_{n+1}=(b_n-c_n)/2$ となっていることは後で使う.)

このように定義された数列の各項は大小関係

$$c_1\leqq c_2\leqq\cdots\leqq c_n\leqq b_n\leqq\cdots\leqq b_2\leqq b_1$$

をみたす. つまり, 数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ はそれぞれ有界な単調数列, すなわちコーシー列だから収束する[*5]. さらに, 数列の決め方により

$$b_n-c_n=\frac{b_{n-1}-c_{n-1}}{2}$$

[*5] 「0010 数列の極限 (ε-δ 論法入門 2)」参照

をみたし,

$$b_n - c_n = \frac{b_1 - c_1}{2^{n-1}}$$

が成り立つ. $n \to \infty$ のときアルキメデスの原理により右辺は 0 に収束するので, 数列 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ は同じ値に収束しなければならない. 今,

$$m = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n$$

とおき, m が $U(A) = B$ の最小元であることを示そう. それには i)「$m \in U(A)$」と ii)「$x < m$ をみたす任意の実数 x は $U(A)$ の元でないこと」を示せば良い.

i) について. A の任意の元 a について, 数列 $\{b_n\}$ は

$$a \leqq b_n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

をみたす. したがって, その極限の大小関係を考えれば, A の任意の元 a に対して

$$a \leqq \lim_{n\to\infty} b_n = m$$

が成り立つので, m は A の上界, すなわち $m \in U(A)$ である.

ii) について. $x < m$ をみたす任意の実数 x について, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = m$ であるので, 数列の収束の定義により $\varepsilon = (m - x)/2 > 0$ について

$$|c_n - m| < \varepsilon$$

をみたす c_n が存在する. $c_n \leqq m$ である[*6]ので, この c_n は

$$x < c_n \leqq m$$

をみたす[*7]. さらに, $c_n \in C$ であるから $c_n < a$ をみたす A の元 a が存在し, $x < a$ となる. つまり, x は A の上界でないので, $x \notin U(A)$ である.

以上 i), ii) により m は $U(A)$ の最小元である. したがって, 題意は示された □

補題 5.2. 集合 A が $\mathbb{R}$ の部分集合であり, 空集合でないとする. このとき $L(A) \neq \emptyset$ ならば $L(A)$ には最大元が存在する.

証明. A の全ての元を -1 倍したもの全体の集合を A' とおく. すなわち

$$A' = \{-a \in \mathbb{R} \mid a \in A\}$$

とする. A には下界 $c (\in L(A))$ が存在し, このとき A の任意の元 a について

$$c \leqq a$$

が成り立つので

$$-a \leqq -c$$

が成り立ち, $-c \in U(A')$ で $U(A') \neq \emptyset$ である. したがって, $U(A')$ には最小元 m が存在する. $M = -m$ とおくと M は $L(A)$ の最大元となることを示そう.

A の任意の元 a において $-a \in A'$ だから

$$-a \leqq m = -M \iff M \leqq a$$

[*6] $c_n \leqq b_n$ だから, $c_n \leqq \lim\limits_{n\to\infty} b_n = m$ である.

[*7] 実際は, c_n が A の上界ではないので, 等号が成り立つ可能性はなく, $x < c_n < m$ である.

をみたし, $M \in L(A)$ である. また $M < x$ をみたす任意の実数 x において, $-x < -M = m$ であることに注意すれば, $-x < -a$ をみたす $-a \in A'$ が存在し, A' の定義により $a \in A$ でもあるので

$$a < x$$

をみたす A の元 a が存在する. すなわち x は A の下界にならないので $x \notin L(A)$ である. 以上により M は $L(A)$ の最大元となり, 題意は示された □

$\mathbb{R}$ の部分集合 $A(\neq \emptyset)$ において, $U(A)$ が空集合でないとき, その最小元 m を A の**上限** (supremum) または**最小上界**といい,

$$m = \sup A$$

と記し, $L(A)$ が空集合でないとき, その最大元 M を A の**下限** (infimum) または**最大下界**といい,

$$M = \inf A$$

と記す.

有界の定義により, 補題 5.1 は次の定理と同値であり, 系も補題 5.2 の証明から分かる.

定理 5.3. $\mathbb{R}$ の任意の部分集合 $A(\neq \emptyset)$ について, A が上に有界ならば $\sup A (\in \mathbb{R})$ が存在する.

系 5.4. $\mathbb{R}$ の任意の部分集合 $A(\neq \emptyset)$ について, A が下に有界ならば $\inf A (\in \mathbb{R})$ が存在し,

$$-A = \{-a \in \mathbb{R} \mid a \in A\}$$

とすると, $\inf A = -\sup(-A)$ が成り立つ.

$A = (-1, 1)$ のとき $U(A) = [1, \infty)$ であり $\sup A = 1$, $L(A) = (-\infty, -1]$ であり $\inf A = -1$ である.

また, 上に有界な単調増加数列が収束することを述べたが, 定理 5.3 からは次の定理を得る.

定理 5.5. 上に有界な単調増加数列 $\{a_n\}$ について

$$A = \{a_n \in \mathbb{R} \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$$

とおくと,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \sup A$$

である.

証明. $A = \{a_n \in \mathbb{R} \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$ は空集合ではなく, 上に有界なので, 定理 5.3 により, 実数 $s = \sup A \in \mathbb{R}$ が存在する. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = s$ となることを確かめる.

s は上界だから任意の $a_n \in A$ に対して

$$a_n \leqq s$$

が成り立つ. また, 任意の $\varepsilon > 0$ について $s - \varepsilon (< s)$ は上界ではない*8ので, 言い換えれば

$$s - \varepsilon < a$$

をみたす A の元 a が存在する. このとき, A の定義により $a = a_N$ をみたす自然数 N が存在し, 数列 a_n が単調増加であることより, $N \leqq n$ をみたす任意の n について

$$a = a_N \leqq a_n$$

*8 上限 s とは上界で最小の値だった

をみたす. また,

$$s-\varepsilon < a_n \leqq s \iff |s-a_n| < \varepsilon$$

に注意すれば, 任意の $\varepsilon > 0$ について

$$N \leqq n \Longrightarrow |s-a_n| < \varepsilon$$

をみたす N が存在することが言えた. したがって, 数列の極限の定義より

$$\lim_{n\to\infty} a_n = s = \sup A$$

である □

系 5.6. 下に有界な単調減少数列 $\{a_n\}$ について

$$A = \{a_n \in \mathbb{R} \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$$

とおくと,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf A$$

である.

問題 5.1. $A = [-1,1] \cap \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] \cap \left[-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right]$ の上限と下限を答えよ.

6 実数の連続性に関するその他の定理

頻繁に登場する定理はすでに述べてあるので, これより後は, 必要になってから読めば良い.

「実数とは何であるか」という問題は古くから研究されてきた. 実際, 整数や有理数は自然な数であるが, 高校までの数学の知識では複素数はもちろん実数でさえもどこか人工的な理想の数のような気がする. 実数が有理数と大きく異なる特徴として, 「連続性」を持つと言うことが挙げられる. この「連続性」と呼ばれる性質をどのように決めておけばよいかを数学者は研究してきた.

現在, この実数の連続性は次のような命題で定義される.*9

命題 1.(アルキメデスの原理) 2 つの任意の実数 $a > 0$, $b > 0$ について

$$na > b$$

をみたす自然数 n が存在する.

命題 2.(完備性) 実数からなる任意のコーシー列は収束する.

命題 3.(上限の存在) 上に有界な $\mathbb{R}$ の部分集合 $A \neq \emptyset$ には上限が存在する.

---

*9 これらの他にデデキントの切断定理とよばれる次の命題もある.

$\mathbb{R}$ を次の条件 (i), (ii), (iii) を全てみたす 2 つの集合 A, B に分ける:

(i) $\mathbb{R} = A \cup B$

(ii) $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$

(iii) 任意の $a \in A$, $b \in B$ について $a \leqq b$ をみたす

このとき, 次のどちらか一方のみが成り立つ:

- A に最大元がなく, B に最小元がある.
- A に最大元があり, B に最小元がない.

命題 4.(実数における有理数の稠密性) 任意の 2 つの実数 a, b について $a < b$ ならば $a < q < b$ をみたす有理数 q が存在する．

命題 5.(単調有界数列の極限) 上に有界な単調増加数列 $\{a_n\}$ は $\sup\{a_n \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$ に収束する．

命題 6.(区間縮小法) $n = 1, 2, 3, \cdots$ について定義される $I_n = [a_n, b_n]$ が, $n \geqq 1$ について $I_n \supset I_{n+1}$ をみたし,

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$$

ならば $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$ であり, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$ である．

命題 7.(ボルツァーノ・ワイヤストラスの定理) 任意の有界な数列は収束する部分列を持つ．

特に有名な命題は, 命題 1, 2, 3 であり, 大抵の書籍に記述してある．また, ページや時間の都合上, これらの命題は証明をつけず, 公理として認めることがほとんどである．有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ から $\mathbb{R}$ をどのように定義すれば良いかを記述しておけば, 公理ではなく定理になるが, 普通はそこまでしない*10.

近年の多くの本は, 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は体*11であることと, 任意の 2 つの実数には順序が決まることを仮定し, 命題 3 を公理で採用し, その公理から上記のその他の命題 1 や 命題 2 なども証明をつけて定理とする場合が多い．実は,

$$\left\{\begin{array}{l}\text{命題 } 1\\ \text{命題 } 2\end{array}\right. \iff \text{命題 } 3$$

が成り立つのでその論法も間違いではないが, 我々は, 命題 3 を公理とする方法を採用しなかった．その理由は, 命題 3 から 命題 1 や命題 2 を示すことが非常に面倒だからである．他の本には証明が丁寧に記述されてあるので, その証明はここでは省く．なお, 理由として付け加えるならば, 命題 1 や 2 のみが公理となるように, $\mathbb{Q}$ からの完備化により $\mathbb{R}$ を構成したことにすると, 演算や順序も $\mathbb{Q}$ の演算や順序と同じように扱えばよいことが分かる．一方, 命題 3 のみが公理となるように実数を $\mathbb{Q}$ から構成してしまうとそう上手く行かない．

6.1 区間縮小法

$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して定まる $\mathbb{R}$ の部分集合 A_n が定義されるとき, $A_1, A_2, \cdots, A_k$ の共通部分 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k$ を簡単に

$$\bigcap_{n=1}^{k} A_n$$

と記す．また, 全ての A_n に共通に含まれる実数全体の集合を

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

と記す.

問題 6.1. $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] = \{0\}$ を示せ.

問題 6.2. $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$ を示せ.

*10 $\mathbb{Q}$ からの完備化により $\mathbb{R}$ を構成できることは「0011 コーシー列と実数 (ε-δ 入門 3)」に述べた

*11 「たい」と読む．簡単に言えば, 和差積商が定義される集合のこと.

$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$A_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$$

と決めるとき, 全ての A_n に共通に含まれる実数が存在し[*12],

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$$

である (問題 6.1). この性質を一般化したものが**区間縮小法**とよばれる次の定理である.

定理 6.1 (区間縮小法)**.** 有界閉区間 $I_n = [a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ が

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$$

をみたすとき,

(1)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$$

である.

(2) 特に $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ ならば

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$$

であり, $a = \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ が成り立つ.

証明. 仮定より

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq b_n \leqq \cdots \leqq b_2 \leqq b_1$$

が成り立つので, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は有界な単調数列であり収束する. よって

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n, \qquad b = \lim_{n\to\infty} b_n$$

となる実数 a, b が存在する. 任意の n について $a_n \leqq b_n$ が成り立っているので $a \leqq b$ であり, 空集合でない閉区間 $[a, b]$[*13] が存在する. また, 定理 5.5 とその系 5.6 により

$$a = \sup\{a_n \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}, \quad b = \inf\{b_n \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$$

であったので, すべての n について

$$a_n \leqq a \leqq b \leqq b_n$$

が成り立つ. すなわち, すべての $n = 1, 2, 3, \cdots$ について

$$[a, b] \subset I_n$$

[*12] $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$

[*13] $a = b$ のときも $[a, b] = \{a\} \neq \emptyset$ である.

が成り立つので, 定義により, $[a,b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ であることを意味し, 例えば $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ をみたす実数 a が存在する. したがって

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$$

であり, (1) が示された.

$I = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ とおく. I が空集合でないので, I の任意の元 c をとる. このとき, すべての n について $c \in [a,b] \subset [a_n, b_n]$ であり,

$$a_n \leqq a \leqq c \leqq b \leqq b_n$$

が成り立つので,

$$0 \leqq c - a \leqq b_n - a_n$$

が成り立つ. 仮定より

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$$

のとき $c - a > 0$ であるならば $\varepsilon = b - a$ について

$$b_n - a_n = |b_n - a_n| < \varepsilon = b - a$$

をみたす自然数 n が存在してしまうので矛盾する. よって $c - a = 0$ だから $a = c$ でなければならない. すなわち

$$[a,b] \subset I = \{a\}$$

となり, このとき $a = b$ でなければ, $[a,b] \subset \{a\}$ とならないので

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$$

であり (2) も示された □

6.2 ボルツァーノ · ワイヤストラスの定理

数列 $\{a_n\}$ の項の中から, もとの数列の項の順序は変えずに無限個の項を選び出して, 新しい数列を作ることが出来る. 例えば $\{a_{2n}\} = \{a_2, a_4, a_6, \cdots\}$ や $\{a_{n+1}\} = \{a_2, a_3, a_4, \cdots\}$ など. この新しい数列をもとの数列の**部分列**という. もとの項の順序を変えないので, 部分列の第 k 項を a_{n_k} とするとき

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$$

をみたす. 例えば, $n_k = 2k$ とすると, $n_1 = 2 < n_2 = 4 < a_3 = 6 < \cdots$ をみたし, このとき, 数列 $\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}$ とは第 k 項が a_{2k} の数列 $\{a_{2k}\} = \{a_2, a_4, a_6, \cdots\}$ のことである.

自然数全体の集合 を $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$[*14]と記す. $\mathbb{N}(\subset \mathbb{R})$ については最小元 1 が存在する. また, 自然数 m について m 以下の自然数は有限個に限ることから, $\mathbb{N}$ の任意の部分集合 K が有限個の元からなる集合のときはもちろん, 無限個の元からなる集合であっても, 最小元 $\min K$ が存在する. このことにより $K_1 = K$, $n_1 = \min K_1$ とし, $i \geqq 2$ 以降は帰納的に $K_i = K_{i-1} - \{n_{i-1}\}$, $n_i = \min K_i$ と決めれば, K の元全てを

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$$

[*14] 0 を自然数に含める流儀もある.

をみたすように並べることができる．すなわち，

$$K = \{n_k \in \mathbb{N} \mid k = 1, 2, 3, \cdots\}$$

をみたす単調増加数列 $\{n_k\} = \{n_1, n_2, n_3, \cdots\}$ が必ず存在する．したがって，$\mathbb{N}$ の部分集合で無限個の元からなるものを K とおけば，

$$K = \{n_1, n_2, n_3, \cdots\}$$

をもちいて数列 $\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}$ を作ることが出来る．このようにして構成される部分列を K **で構成される部分列**と呼ぶことにする．

収束する数列の部分列は常に収束することを前に述べたが，発散する数列でも，収束する部分列が存在する場合がある．例えば，$a_n = (-1)^n$ のとき数列 $\{a_n\}$ は発散するが，その部分列 $\{a_{2n}\} = \{1, 1, 1, \cdots\}$ は収束する．実は，数列が有界であるならば，収束する部分列がいつでも存在することが言える．そのためには次の補題を示す．

補題 6.2. 任意の数列には単調な部分列が存在する．

証明. 数列 $\{a_n\}$ について，

$$K = \{k \in \mathbb{N} \mid \text{全ての } n\ (\geqq k) \text{ について } a_n \leqq a_k\}$$

とおく．(例えば，数列 $\{(-1)^n\}$ については $K = \{2k \mid k = 1, 2, 3, \cdots\} = \{2, 4, 6, \cdots\}$ となるし，数列 $\{n\}$ については $K = \emptyset$，数列 $\{1/(\sqrt{5} - n)\}$ については $K = \{2\}$ となる.)

このとき以下の 2 つの場合が考えられる．

(1) K が無限個の元からなる集合である場合
(2) K が空集合であるか，有限個の元からなる集合の場合

それぞれの場合について，単調な部分列を構成する方法を述べる．

(1) の場合．K から部分列を構成すれば良い．つまり，

$$K = \{n_k \mid k = 1, 2, 3, \cdots\}$$

となる単調増加数列 $\{n_k\}$ を用いて，部分列 $\{a_{n_k}\}$ を構成すれば

$$a_{n_1} \geqq a_{n_2} \geqq a_{n_3} \geqq \cdots$$

となるので，部分列 $\{a_{n_k}\}$ は確かに単調減少数列となる．

(2) の場合．K が空集合であるときは $n_1 = 1$，K が空集合でないときは，K に最大元が存在するので，$n_1 = (\max K) + 1$ とおく．このとき n_1 より真に大きい自然数は K の元ではないので

$$n_1 < n_2 \text{ かつ } a_{n_1} \leqq a_{n_2}$$

をみたす自然数 n_2 が必ず存在する．また，n_2 より真に大きい自然数も K の元ではないので

$$n_2 < n_3 \text{ かつ } a_{n_2} \leqq a_{n_3}$$

をみたす自然数 n_3 も必ず存在する．同様に，$n_4, n_5, \cdots$ と無限個の $\{n_k\}$ を取ることが出来る．なぜなら，有限個しか取れず，$\{n_k\}$ の最後の項が m なら $m+1$ は K の元になってしまい矛盾するからである．このように選びだした自然数の集合 $K' = \{n_k | k = 1, 2, 3, \cdots\}$ から構成した部分列は単調増加数列になる．

以上により，題意は示された □

補題 6.2 により, **ボルツァーノ · ワイヤストラス**[*15]**の定理**と呼ばれる次の定理を得る.

定理 6.3 (ボルツァーノ · ワイヤストラスの定理)**.** 任意の有界な数列には収束する部分列が存在する.

証明. 有界な数列の任意の部分列も有界であるので, 任意の数列には補題 6.2 により有界な単調部分列が存在する. 有界な単調数列は収束するので, この部分列は収束する. よって, 題意は示された □

上述の証明は補題から導いているが, 区間縮小法から導く書籍も多いので参考にするとよい.

問題 6.3. 第 n 項 a_n が $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}-n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について,

$$K = \{k \in \mathbb{N} \mid \text{全ての } n\ (\geqq k) \text{ について } a_n \leqq a_k\}$$

としたとき $K = \{2\}$ となることを示せ.

参考書籍

本文に登場する語句や記号, 証明は次の書籍を参考に執筆した. ただし定義や公理は微妙に異なる.

荒井正治	『理工系 微積分学 – 第 3 版 – 』	(学術図書出版社)
エビングハウス他 (成木勇夫訳)	『数 上』	(シュプリンガー · フェアラーク東京)
吹田信之 · 新保経彦	『理工系の微分積分学』	(学術図書出版社)
杉浦光夫	『基礎数学 2 解析入門 I』	(東京大学出版会)

[*15] Bolzano–Weierstrass. ボルツァーノはチェコの数学者, ワイヤストラスはドイツの数学者で「ワイエルシュトラス」と記述することもある.

問題の略解

問題 2.1 $\max A = 2$, $\min A = -1$
問題 2.1 $B = [-1, 1]$ であり, $\max B = 1$, $\min B = -1$
問題 2.3 $\max C = \min C = 0$ ($\{0\}$ を空集合と勘違いしてはいけない.)

問題 5.1 $A = \left[-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right]$ であり, $\sup A = \dfrac{1}{3}$, $\inf A = -\dfrac{1}{3}$
問題 6.1 $A = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ とおく. 任意の自然数において $-1/k \leqq 0 \leqq 1/k$ が成り立つので, $0 \in A$ である. したがって, $A \neq \emptyset$ である. そこで, A の任意の元を a とする. 今, $a \neq 0$ と仮定すると, アルキメデスの原理により $0 < 1/k < |a|$ をみたす自然数 k が存在する. このとき, $1/k < a$ ($a > 0$ のとき) または $a < -1/k$ ($a < 0$ のとき) が成り立つので ので $a \notin [-1/k, 1/k] = A_k$ をみたす A_k が存在することになり $a \in A$ に矛盾する. よって $a = 0$ に限り, $A = \{0\}$ である. 以上により題意は示された.
問題 6.2 略. (問題 6.1 とほとんど同じ論法で示される.)
問題 6.3 数列 $\{a_n\}$ の項のうち, 正であるものは a_1 と a_2 のみであり,

$$a_1 < a_2$$

であるので 1 は K の元でない. また $n \geqq 3$ については $a_n < a_{n+1} < 0 < a_2$ をみたすので 3 以上の自然数は K の元でなく, $2 \in K$ である. 以上により $K = \{2\}$ である.