関数の極限の再定義 (ε-δ 入門 5)

立命館大学理工学部数学学修相談会

2018 年 8 月 31 日 *

概要

関数の極限は微分積分学において, 基本となる考え方である. 関数の極限は高校数学において, 計算方法などを主に学ぶ一方, 定義は曖昧である. 定義が曖昧である場合, 証明することも難しくなる. 例えば $\lim_{x\to 0} x = 0$ や $\lim_{x\to 0} x \neq 1$ を示そうにも, 高校数学の知識では難しい. 微分積分学において基本となる関数の極限の理解が曖昧なままだと, 微分や積分の理解も曖昧なままになって, 結局は「曖昧な知識を信じるだけ」の学問になりかねない. 関数の極限をもう少し, 厳密に定義するものとして, ε-δ 論法による定義を説明する.

目次

1 はじめに

数列の極限も関数の極限も同じ記号 lim を使用するからか, 区別が付いていない者も多い. 計算のための公式や, 考え方も似ているので混合してしまうのも仕方がないかもしれない. ところが, 数列 $\{\sin(n\pi)\}$ は収束するが, この数列とよく似た関数 $\sin(\pi x)$ においては $x \to \infty$ のとき, 発散する. したがって, 数列 $\{1/n\}$ が

* 執筆 平岡由夫

0 に収束するからといって, 何の疑いもせずに, 関数の極限 $\lim_{x\to\infty}(1/x)$ も同じ 0 に収束すると信じてはいけない. 実際は 0 に収束するのだが, 数列の極限も関数の極限の同じだからと誤魔化されたり, 騙されたりしてはいけない.

a の近くで定義される関数 $f(x)$ について考えよう. $f(x)$ が $x=a$ で定義されているならば, $x=a$ における $f(x)$ の値は勿論 $f(a)$ である. では, $x \neq a$ であるが x をギリギリまで a に近づけたときの $f(x)$ の値 (この場合は $f(x)$ は $x=a$ で定義されている必要はない) はどうなるか? 1 つの値に近づくときもあれば, そうならないときもある. 運良く, 1 つの値に近づくなら, このギリギリのときの $f(x)$ の値を $x \to a$ のときの $f(x)$ の極限値という. 関数の極限のイメージは上述の通りである. イメージだけでは細かな議論ができないことも, 今後明らかになるであろうから, しっかりした定義も理解しておこう.

なお, 実数全体の集合を $\mathbb{R}$, 関数 f の定義域を $D(f)$ と記す.

2 関数の極限 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ の再定義

2.1 ε-δ 論法を用いない関数の極限の定義

高校数学における関数の極限は次のように定義した:

> 関数 $f(x)$ において, x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき, $f(x)$ がある一定の値 α に近づく場合,
>
> $$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$$
>
> と書き, この値 α を $x\to a$ のときの $f(x)$ の**極限値**という.
>
> また, このとき, 次のようにも言い表す.
>
> $x\to a$ のとき $f(x)$ は α に**収束する**

大学で数学を学び始めた者にとってはかなり曖昧に感じる定義に違いない.

1. 「値」とは何か?
2. x を a に限りなく近づける近づけ方は唯一ではないが, ある近づけ方では $f(x)$ が α に近づくが, 別の近づけ方では $f(x)$ は α と異なる β に近づく場合はどう考えれば良いのか?
3. そもそも「限りなく近づく」とは?

高校数学では, とりあえず極限値を求めることに重点を置くので, この曖昧な定義でもそれほど困ることはない. 具体的な計算や, 紹介される定理を使うことにより, その曖昧さはカバーされる. 例えば, 「値」とは実数のことであり, 例えば, 虚数や, ∞ に収束することはない. また, 右極限, 左極限の性質において, a への近づけ方が異なったとき, $f(x)$ が異なる値に限りなく近づくならば「収束する」とは言わないことを, なんとなく理解する. しかしながら, 「限りなく近づく」は曖昧なままである. つまり, 高校数学において, 関数の極限値とは「よく分からない」値を求めていることに他ならない.

大学で使用する教科書によっては, ε-δ 論法を使用しないものもある. そのような場合は, 関数の極限を次のように定義する:

> $x=a$ の近くで定義されている関数 $f(x)$ ($f(x)$ は $x=a$ で定義されていなくて良い) において, x が a をとらずに a に限りなく近づくとき, $f(x)$ の値が近づき方によらない一定の数 α に限りなく近づ

くならば, $f(x)$ は $x \to a$ のとき**収束**して**極限値** α を持つといい, このことを

$$f(x) \to \alpha \ (x \to a) \quad \text{または} \quad \lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

で表す.

近づき方が唯一でないことも考慮して, 若干, 厳密にはなっているが, 実際, $x \to a$ のとき, α に収束すると思われる関数 $f(x)$ が, 本当に α に収束しているのかを証明しようとすると, 手も足も出ないことに気付く. 例えば, 「関数 $f(x) = x + 3$ において $x \to 0$ のとき $f(x)$ が 3 に収束することを示せ.」と言われても, 極限値が 3 であることはなんとなく想像できても, この定義だけでは, 収束することを示すこともできない. また, 仮に示せたとしても, 3 以外の値には本当に収束しないのか, と不安になるかもしれない*[1]. それは, 曖昧な定義が原因だと考えられる.

そこで, 関数の極限をもう少し厳密に定義しておく必要が生じてくる. その基本である ε-δ 論法による定義を紹介しよう. 定義を厳密にすることにより, 曖昧なままでは証明できなかった定理も証明される.

2.2 関数の極限 $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ の再定義

関数の極限の定義も基本的なアイデアは数列の極限と同じである. $f(x)$ が $x \to a$ のとき α に収束している状態とは次のように考えて定義する:

x が a と異なり, a に十分近いとき, $f(x)$ は限りなく α に近い.

ここで, 「a に十分近い」は「a に限りなく近い」の間違いではないか, と思うかもしれないがこれで正しい.

「x が a に」「十分近い」 は 「x と a の距離が十分小さい」と考える. ただし, 「x は a と異なり」の条件が付くことに注意する. $\delta(> 0)$ 未満の距離を近いと定義すれば

$$|x - a| < \delta$$

をみたす x は a に近いことになる. $x \neq a$ の条件も考慮すれば

$$0 < |x - a| < \delta$$

をみたす δ が存在したなら, そのとき, x は a と異なり, a に十分近い値をとっていることになる. 数列の極限において「 n が十分大きいとき」は 「$n \geqq N$ をみたす自然数 N が存在するとき」と言い換えられたのと同様, 「 x が a と異なり, 値 a に十分近い」は「

$$0 < |x - a| < \delta$$

をみたす実数 $\delta(> 0)$ が存在する」と考えれば良い. また, どんな $\varepsilon(> 0)$ についても

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

をみたせば, 「$f(x)$ と α は限りなく近い」と考えれば, 次のように定義しておけば良い.

定義 2.1. a の近くで定義される関数 $f(x)$ が, 任意の正の実数 ε について

$$0 < |x - a| < \delta, \ x \in D(f) \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon \tag{2.1}$$

*[1] 高校の数学では, 極限値の一意性は定義に含まれているのだが, 他の値に収束しないかどうかは気にも掛けない

をみたす正の実数 δ が存在するとき, $x \to a$ のとき $f(x)$ は α に**収束**して, **極限値** α を持つといい,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

または

$$f(x) \to \alpha \qquad (x \to a)$$

と記す. また, 収束しないときは**発散**するという.

注意 1. 論理記号を用いて記述すれば

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t.}$$
$$0 < |x-a| < \delta,\ x \in D(f) \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

となる. ここで " $\forall \delta > 0$ " ではなく, " $\exists \delta > 0$ " であることに注意.

注意 2. 簡単のため,「a の十分近くで定義される関数 $f(x)$」 と記したが, 厳密には「a が $D(f)$ の集積点*[2] のとき」の意味で用いている. つまり, ある開区間 (a,k) または (k,a) が $D(f)$ に含まれる関数で良い. a が $D(f)$ の孤立点*[3]であっても関数の極限は定義できるが, 今は孤立点での極限は考えない.

また, 関数 $\log x$ (定義域は $(0,\infty)$) や 関数 $\sqrt{x}$ (定義域は $[0,\infty)$) についても $x \to 0$ のときの極限を考えるときに, 条件 $x \in D(f)$ が必要となる. 何故なら, どんなに小さな δ を用意しても, $0 < |x-0| < \delta$ かつ $x < 0$ をみたす x が必ず存在してしまい, この x で関数が定義されない. ただし, この条件を気にするような複雑な関数はあまり登場しないので気にしなくても良いし, 以下の記述でも略記している場合がある.

注意 3. 関数が上述の定義をみたし, ある値に収束するとき, その値は唯一つに定まること (「関数の極限値の一意性」) については後述する.

定義によれば, $x \to a$ のとき, $f(x)$ が α に収束するとき, 任意の $\varepsilon > 0$ について

$$0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

をみたす正の実数 δ が存在することになる. このとき $0 < \delta' < \delta$ をみたす任意の δ' についても

$$0 < |x-a| < \delta' \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

をみたすことになる. したがって, 実際は a に限りなく近い $x (\neq a)$ で $f(x)$ が α に限りなく近くなることを意味している. また,「正の実数 δ が存在する ($\exists \delta > 0$)」を「任意の正の実数 δ ($\forall \delta > 0$) で成り立つ」としてはならない. 定義において,「任意の正の実数 δ で成り立つ」としてしまうと a から**限りなく離れた** x においても

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ必要が出てきて, ほとんどの関数が収束しなくなってしまう.

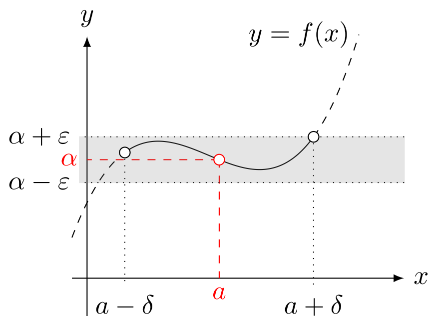
問題 2.1. $f(x) = x$ のとき (後にあるように, $\lim_{x \to a} f(x) = a$ が成り立つのだが), 任意の $\varepsilon > 0$, <u>任意の $\delta > 0$</u> においては

$$0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

が成り立たないことを示せ.

*[2] 2.3 を参照
*[3] 2.3 を参照

$x \to a$ のとき $f(x)$ が α に収束するとは, どんな小さな $\varepsilon > 0$ についても, 以下のように a を中心とし, 横幅を十分に狭くした範囲[*4] のグラフ (厳密には $x = a$ における点は除く.) が, $y = \alpha + \varepsilon$ と $y = \alpha - \varepsilon$ に挟まれる[*5]帯の中に, すっぽり収まるイメージである. ($f(x)$ が $x = a$ でも定義される関数の場合, 点 $(a, f(a))$ がこの帯に収まる必要は全くないことに注意.)



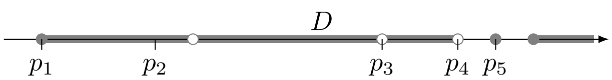
2.3　触点, 集積点, 孤立点について

$\mathbb{R}$ の部分集合における触点, 集積点, 孤立点について, 必要最低限の簡単な解説をしておく.

D を $\mathbb{R}$ の部分集合とする. 任意の正の ε について, p を中心とする開区間 $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ と D が共通部分をもつとき, すなわち $\forall \varepsilon (> 0)$ について

$$(p - \varepsilon, p + \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$$

をみたすとき, p を D の**触点**という.



p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 は D の触点

$p \in D$ ならば p は D の触点であるが, p が D の触点であっても $p \in D$ とは限らない. D_1 を実数全体の集合, D_2 を 0 以外の実数全体の集合, D_3 を負でない整数全体の集合とする. すなわち

$$D_1 = \mathbb{R}, \qquad D_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}, \qquad D_3 = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

とする. このとき 0 は D_1, D_2, D_3 の触点であり, $0 \in D_1$, $0 \in D_2$ であるが, $0 \notin D_2$ である.

触点は 2 つに分類される. D の触点 p と, $\varepsilon (> 0)$ で定まる p を中心とする開区間 $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ の共通部分を $C(p, \varepsilon)$ と記す. すなわち

$$C(p, \varepsilon) = (p - \varepsilon, p + \varepsilon) \cap D$$

とする. 上述のように, 0 は D_1, D_2, D_3 の触点であるが, 0 を中心とする開区間 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ と D_1, D_2, D_3 のそれぞれの共通部分 $C_1(0, \varepsilon)$, $C_2(0, \varepsilon)$, $C_3(0, \varepsilon)$ について

1. $C_1(0, \varepsilon)$, $C_2(0, \varepsilon)$ については, 如何なる $\varepsilon (> 0)$ についても触点 0 以外の実数が含まれる.
2. $C_3(0, \varepsilon)$ については, $0 < \varepsilon < 1$ について, 触点 0 以外の実数が含まれない

[*4] $|x - a| < \delta \iff -\delta < x - a < \delta \iff a - \delta < x < a + \delta$
[*5] $|f(x) - \alpha| < \varepsilon \iff -\varepsilon < f(x) - \alpha < \varepsilon \iff \alpha - \varepsilon < f(x) < \alpha + \varepsilon$

の違いがある．1. のような触点を集積点, 2. のような触点を孤立点という．厳密に定義しておこう．

D の触点 p が

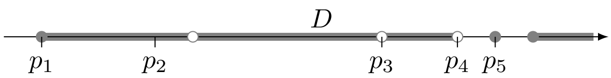
$$\forall\varepsilon(>0) \text{ について } (p-\varepsilon, p+\varepsilon)\cap(D-\{p\})\neq\emptyset$$

をみたすとき p は D の**集積点**といい, 集積点でない触点 p, すなわち

$$(p-\varepsilon, p+\varepsilon)\cap(D-\{p\})=\emptyset$$

をみたす $\varepsilon(>0)$ が存在する p を D の**孤立点**という．ここで $D-\{p\}$ は 集合 D から集合 $\{p\}$ の元 (今の場合 p だけ) を取り除いた残りの元全体を意味する．なお, D の触点 p が孤立点である場合は $p\in D$ に限るが, 集積点である場合には $p\in D$ の場合も $p\notin D$ の場合もある．

$$\text{触点}\begin{cases}\text{集積点}\\ \text{孤立点}\end{cases}$$



p_1, p_2, p_3, p_4 は D の集積点
p_5 は D の孤立点

孤立点は, その近くに孤立点以外の D の元がないこと, つまり, 言葉どおりに「孤立した」 D の元を意味している．また p が D の集積点であるとは, 実数の連続性により

$$\lim_{n\to\infty}p_n=p, \qquad p_n\in D-\{p\}$$

をみたす数列 $\{p_n\}$ が存在することと同値である．したがって, 有理数の全体の集合を D (つまり, $D=\mathbb{Q}$) としたとき, 任意の実数は D の集積点である．

問題 2.2. D を 1 以外の実数全体からなる集合 (つまり $D=\mathbb{R}-\{1\}$) とする．このとき, 0, 1 は D の集積点であることを確認せよ．

2.4　簡単な例とよく使われる結果

ε-δ 論法による定義になれるために簡単な例と, よく登場する結果を命題としてあげておく．

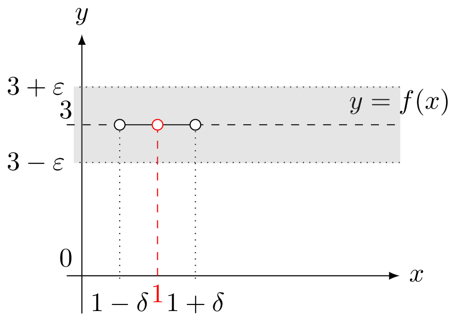
例 2.3. $f(x)=3$ のとき $\lim_{x\to1}f(x)=3$ である．

任意の $\varepsilon(>0)$ について, 例えば $\delta=1/2$ とする[*6]と $|x-1|<\delta \iff 1/2<x<3/2$ であり, このとき

$$|f(x)-3|=|3-3|=0<\varepsilon$$

をみたすので, $\lim_{x\to1}f(x)=3$ である．

[*6] 今の場合 δ は ε に関係なく決めることができるが, 一般には, そうではない．



一般には, 以下の命題を得る.

命題 2.2. c を定数としたとき

$$\lim_{x\to a} c = c$$

である.

問題 2.4. 命題 2.2 を示せ.

例 2.5. $f(x) = x$ のとき $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$ である.

任意の $\varepsilon > 0$ について考えるのは, 慣れないうちは難しい. そこで, いくつか具体的な ε について (2.1), 今の場合

$$0 < |x-1| < \delta \Longrightarrow |f(x)-1| < \varepsilon \tag{$*$}$$

をみたす δ を見つけてみよう. すなわち, $0 < |x-1| < \delta$ をみたす**全ての** x について, $|f(x)-1| < \varepsilon$ をみたすような δ を (ε 毎に) 決定する. $\varepsilon = 1/2$ のとき, $(*)$ は

$$0 < |x-1| < \delta \Longrightarrow |x-1| < \frac{1}{2}$$

となる. これをみたす δ を見つければ良い. $\delta = 2$ では不適である. 何故なら $x = 0$ において $0 < |x-1| < \delta$ をみたすが $|x-1| < 1/2$ はみたさないからである. ところが, $\delta = 1/2$ なら $(*)$ をみたす. 勿論, $\delta = 1/4$ でも構わない. ($0 < \delta \leqq 1/2$ をみたす δ なら良い.) 同様に $\varepsilon = 1/3$ のときは, $\delta = 1/3$, $\varepsilon = 1/100$ のときは, $\delta = 1/100$ としておけば良い. 一般に, 任意の $\varepsilon > 0$ について, $\delta = \varepsilon$ とすると $0 < |x-1| < \delta$ のとき

$$|f(x)-1| = |x-1| < \delta = \varepsilon$$

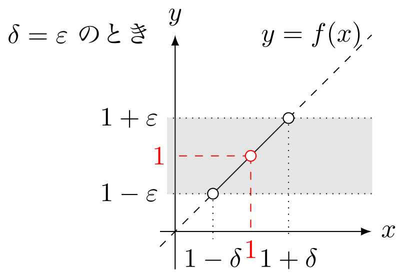
となり, $(*)$ をみたすので, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$ が示された. 与えられた任意の ε について, 都合の良い δ がいつでも存在することを明示しているところがポイントである. もちろん, δ の決め方は唯一つではなく, 例えば $\delta = \varepsilon/2$ としても良い. また, $\varepsilon = \varepsilon_0 (> 0)$ のとき, $\delta = \delta_0$ で (2.1), すなわち

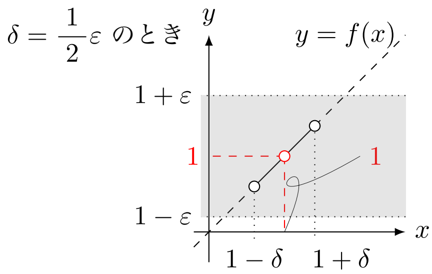
$$0 < |x-a| < \delta_0 \Longrightarrow |f(x)-\alpha| < \varepsilon_0$$

をみたすなら, $\varepsilon_0 < \forall\varepsilon$ についても, 同じ δ_0 で

$$0 < |x-a| < \delta_0 \Longrightarrow |f(x)-\alpha| < \varepsilon$$

をみたすので, 具体的に考察する ε は 0 により近い値の方が合理的である. 例えば, $\varepsilon = 1/2$ において, δ が決定できたなら, 自動的に, $\varepsilon = 1$ や $\varepsilon = 100$ など, 1/2 より大きい ε についても, δ が決定できたことになるので, 考察する必要はない.





一般の $x \to a$ の極限についても, $\varepsilon(>0)$ について $\delta = \varepsilon$ とすれば定義をみたすので, 高校時代は疑いもしなかった次の命題が成り立つ.

命題 2.3.

$$\lim_{x \to a} x = a$$

である.

例 2.6. $f(x) = 2x$ のとき $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ である.

いくつか具体的な ε について (2.1), 今の場合,

$$0 < |x-1| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon \qquad (*)$$

をみたす δ を見つけてみよう.$|f(x) - 2| = |2x - 2| = 2|x-1|$ であるので $\varepsilon = 1/2$ のとき, $(*)$ は

$$0 < |x-1| < \delta \Longrightarrow |x-1| < \frac{1}{4}$$

となる. これをみたす δ を見つければ良い. 当然, $0 < \delta \leqq 1/4$ については

$$0 < |x-1| < \delta \Longrightarrow |x-1| < \frac{1}{4}$$

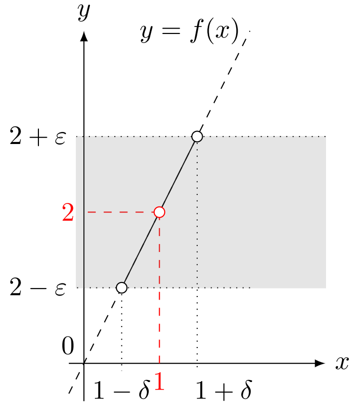
が成り立つので, $\varepsilon = 1/2$ のときは, 例えば $\delta = 1/4$ で $(*)$ をみたす. 同様に $\varepsilon = 1/3$ のときは $\delta = 1/6$, $\varepsilon = 1/100$ のときは $\delta = 1/200$ とすれば良い. 一般の $\varepsilon > 0$ について, $0 < \delta \leqq \varepsilon/2$ において

$$0 < |x-1| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$$

をみたす. したがって, 任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta = \varepsilon/2$ とすると

$$0 < |x-1| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 2| = 2|x-1| < 2\delta = \varepsilon$$

であるので, 定義により, $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ である.



問題 2.7. $\displaystyle\lim_{x\to 2}(-x) = -2$ を示せ.

問題 2.8. $\displaystyle\lim_{x\to 1}(-2x) = -2$ を示せ.

問題 2.9. c を定数とする. $\displaystyle\lim_{x\to a}(cx) = ca$ を示せ.

2.5 関数の極限に関する注意

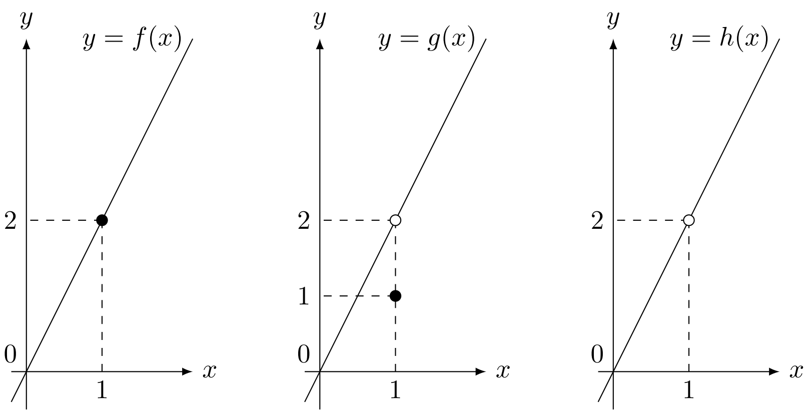
次の例を考えてみよう.

例 2.10.

$$g(x) = \begin{cases} 2x & (x \neq 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}, \qquad h(x) = \frac{2x(x-1)}{x-1}$$

のとき, $\displaystyle\lim_{x\to 1} g(x) = 2$, $\displaystyle\lim_{x\to 1} h(x) = 2$ である.

例 2.6 の $f(x) = 2x$ とよく似ているが, $g(x)$ も $h(x)$ も $f(x)$ とは異なる. 何故なら, $x = 1$ のとき $g(1) = 1 \neq 2 = f(1)$ であるし, $f(x)$ は実数全体で定義されているが, $h(x)$ は $x = 1$ で定義されないからである.



また, $h(x)$ は $x = 1$ において定義されない関数であるが, $x \to 1$ の極限は存在する. 実際, 任意の $\varepsilon > 0$ において, $\delta = \varepsilon/2$ とおくと, $0 < |x-1| < \delta$ のとき, $x - 1 \neq 0$ なので,

$$h(x) = \frac{2x(x-1)}{x-1} = 2x = f(x)$$

だから,

$$|h(x) - 2| = |f(x) - 2| = 2|x-1| < 2\delta = \varepsilon$$

が成り立ち,

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

である. $x = 1$ で定義されている関数 $g(x)$ についても同様で, $x \neq 1$ においては

$$g(x) = 2x = f(x)$$

なので,

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

である.

$x \to a$ のときの関数の極限の定義において, $0 < |x-a|$ つまり $x \neq a$ の条件が含まれていることに注意しなければならない. $x \neq a$ のとき $f(x) = f_0(x)$ ならば, たとえ $f(x)$ が a で定義されなかったり, $f(a) \neq f_0(a)$ であっても, 定義に従えば, $x \to a$ のときの $f(x)$ の極限は $f_0(x)$ の極限に置き換えて考えて良いのである.

2.6 関数の極限値の一意性

上述の例では関数が収束し, 極限値が定義をみたすことを確かめてはいるが, その他の値に収束しないことは言及していない. 例えば $\lim_{x\to 1} x = 1$ は述べたが, $\lim_{x\to 2} x \neq 2$ は言及しなかった. 実際に確認しておこう.

例 2.11. $f(x) = x$ のとき $\lim_{x\to 1} f(x) \neq 2$ である.

$\lim_{x\to 1} f(x) = 1$ であったが, 仮に $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ であれば, 任意の $\varepsilon > 0$ について

$$0 < |x-1| < \delta \Longrightarrow |(f(x) - 2| < \varepsilon \tag{$*$}$$

をみたす $\delta(>0)$ が存在する. これが矛盾することを示せば良い. つまり, ある $\varepsilon > 0$ については, 如何なる $\delta(>0)$ についても $(*)$ が成り立たない, すなわち, 任意の $\delta(>0)$ について

$$0 < |x-1| < \delta \Longrightarrow |(f(x) - 2| > \varepsilon$$

となる x が存在することをいえば良い.

今, $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$ であったことを思い出せば, $\varepsilon = 1/3$ について,

$$0 < |x-1| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

をみたす $\delta_1(>0)$ は存在する. (例えば $\delta_1 = 1/3$ など) 任意の $\delta(>0)$ について,

$$\delta_0 = \min(\delta, \delta_1)$$

とおくと, $0 < \delta_0 \leqq \delta$ であり,

$$0 < |x-1| < \delta_0$$

をみたす x は必ず存在し, この x において

$$|1-2| = |1 - f(x) + f(x) - 2| \leqq |1 - f(x)| + |f(x) - 2|$$

であり, $0 < |x-1| < \delta_1$ もみたすので

$$\begin{aligned} |(f(x) - 2| \geqq |1-2| - |f(x) - 1| > 1 - \frac{1}{3} &= \frac{2}{3} \\ > \frac{1}{3} &= \varepsilon \end{aligned}$$

となってしまう. つまり $\varepsilon = 1/3$ のとき, 任意の $\delta(>0)$ について

$$0 < |x-1| < \delta \Longrightarrow |(f(x) - 2| > \varepsilon$$

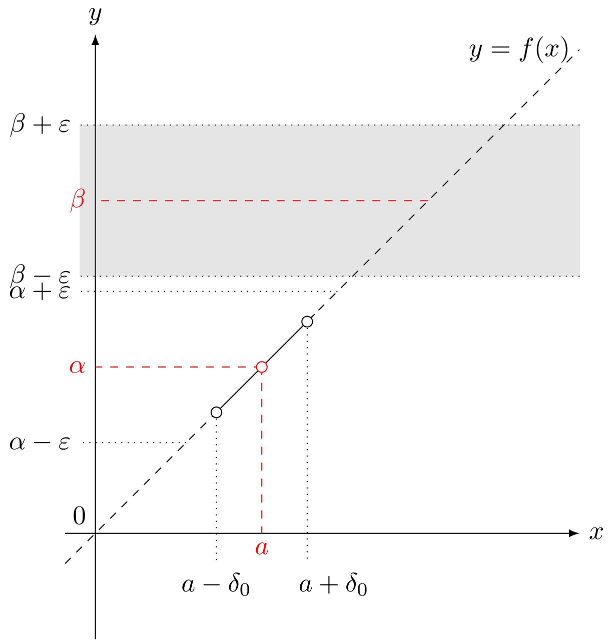
となる x が存在する. したがって, $\lim_{x\to 1} f(x) \neq 2$ である.

$\varepsilon = 1/3$ として, 都合の良い δ が存在しないことを示したが, この ε の探し方を述べておこう. 実は, $x \to 1$ のときの $f(x)$ の極限値が 1 であることがヒントになっている. $\alpha = 1$ とおき, α 以外の値を β とする (上述

の例では $\beta = 2$). このとき, 開区間 $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ と $(\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$ が共通部分を持たないように $\varepsilon (> 0)$ を決めるだけで良い. 具体的には,

$$0 < \varepsilon \leqq \frac{|\alpha - \beta|}{2}$$

をみたす ε で上手く行く*7. イメージとしては, 次のグラフのようになる. $y = \beta - \varepsilon$ と $y = \beta + \varepsilon$ で囲まれる帯の部分に収まらないようなグラフの実線部分が存在することを示しているだけである.



問題 2.12.

$$g(x) = \begin{cases} 2x & (x \neq 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

のとき, $\lim_{x \to 1} g(x) \neq g(1)$ を示せ.

一般に示すことも出来る. $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ のとき, $\beta (\neq \alpha)$ について

$$\varepsilon = \frac{|\alpha - \beta|}{3} > 0$$

とする. 今, $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ により,

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

をみたす $\delta_1 (> 0)$ が存在する. 任意の $\delta (> 0)$ について

$$\delta_0 = \min(\delta, \delta_1)$$

とおくと, $0 < \delta_0 \leqq \delta$ であり,

$$0 < |x - a| < \delta_0$$

をみたす x は必ず存在し, この x において

$$|\alpha - \beta| = |\alpha - f(x) + f(x) - \beta| \leqq |\alpha - f(x)| + |f(x) - \beta|$$

*7 すなわち, 上述の例の場合, $\varepsilon = 1/2$ でも上手く行く. 確かめてみよ

であり, $0 < |x-a| < \delta_1$ もみたすので,

$$\begin{aligned} |f(x)-\beta| &\geqq |\alpha-\beta| - |f(x)-\alpha| \\ &> 3\varepsilon - \varepsilon \\ &> \varepsilon \end{aligned}$$

となってしまう. したがって, $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ のとき, $\beta \neq \alpha$ ならば, $\lim_{x\to a} f(x) \neq \beta$ である.

定理 2.4 (関数の極限値の一意性)**.** $f(x)$ が $x \to a$ のとき収束するならば, その極限値は一意的に定まる.

2.7 紛らわしい定義

数学においては, よく知られた用語においても定義が異なる場合がある. 関数の極限においても, $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ の定義が次のようになっている本もある (例えば 『基礎数学 2 解析入門 I』(杉浦光男著・東京大学出版) など):

どんな $\varepsilon > 0$ に対しても,

$$|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-\alpha| < \varepsilon$$

をみたす $\delta > 0$ が存在する. このとき $x \to a$ のとき $f(x)$ は α に収束するといい,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$$

と表す.

この定義だと,

$$g(x) = \begin{cases} 2x & (x \neq 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

は $x \to 1$ のとき 2 に収束しない. 例えば $\varepsilon = 1/2$ のとき,

$$|x-1| < \delta \Longrightarrow |g(x)-2| < \varepsilon$$

をみたす δ は存在しない. 何故なら, いかなる $\delta > 0$ を決めたとしても, $x = 1$ は $|x-1| < \delta$ を必ずみたすが, このとき, $|g(1)-2| = 1 > 1/2 = \varepsilon$ となってしまうからである. よって $g(x)$ は $x \to 1$ のとき, 2 には収束しない.

同じ $\lim_{x\to a}$ の記号を用いるが, 定義が異なる (同値でもない!) ので注意しなければならない.

3 関数の極限 $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ の再定義

x が限りなく a に近づくとき, $f(x)$ が発散する場合で, 特に $f(x)$ の値が限りなく大きくなることがある. このとき, $x \to a$ のとき, $f(x)$ は (正の) 無限大に発散すると言って,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

と表した. これも ε-δ 論法で定義しておく.

$f(x)$ の値が限りなく大きいとは, どんな (大きな) 実数についても

$$L < f(x)$$

をみたす, と考えれば, 次のように定義しておけば良いことも理解できるであろう.

定義 3.1. a の十分近くで定義される関数 $f(x)$ が, 任意の実数 L について

$$0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow L < f(x)$$

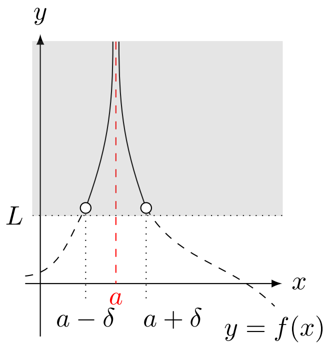
をみたす正の実数 δ が存在するとき, $x \to a$ のとき $f(x)$ は **(正の) 無限大に発散**するといい,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

または

$$f(x) \to \infty \qquad (x \to a)$$

と記す[*8].



例 3.1. $f(x) = 1/|x-1|$ のとき,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$$

である.

任意の実数 L について, $L < L'$ をみたす正の実数 L' が存在する. そこで, $\delta = 1/L' > 0$ とおくと, $0 < |x-1| < \delta$ ならば

$$f(x) = \frac{1}{|x-1|} > \frac{1}{\delta} = L' > L$$

が成り立つ. よって

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$$

である. 定義によれば「任意の実数 K」についての δ の存在を示さなければならないが, K から直接 δ を決めるのは難しい. 例えば $L = 0$ のときは $\delta = 1/L$ とできない. ところが, L より十分大きい正の実数 L' がいつでも存在する (アルキメデスの原理) ことを用いて, L' で δ を決めていることがポイントである.

問題 3.2. $x \to 0$ のとき 関数 $1/x$ が正の無限大に発散しないことを示せ.

また, $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ については, $x \to a$ のとき $-f(x)$ が限りなく大きくなると考えて, 次のように定義する.

定義 3.2. a の十分近くで定義される関数 $f(x)$ が,

$$\lim_{x \to a}(-f(x)) = \infty$$

[*8] ∞ は実数ではないので「極限値 ∞ を持つ」の表現はおかしい. しかし $\lim f(x)$ を 「$f(x)$ の極限」と言う場合が有り, その意味で 「極限が ∞」の表現は許される.

となるとき, $x \to a$ のとき $f(x)$ は**負の無限大に発散**するといい,

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

または

$$f(x) \to -\infty \qquad (x \to a)$$

と記す.

4 関数の極限 $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ の再定義

十分大きな x 全てで定義さえる関数 $f(x)$ について, x を限りなく大きくしたとき, $f(x)$ が一定の値 α に近づく場合, $x \to \infty$ のとき $f(x)$ は α に収束するという. これを ε-δ 論法で定義しておこう.

「x を限りなく大きくする」は「x が十分大きいとき」と解釈すれば良いので, 数列の極限と同様 「$K < x$ をみたす実数 K が存在する」と言い換えるだけである.

定義 4.1. ある無限開区間 (k, ∞) で定義される関数 $f(x)$ について, 任意の正の実数 ε について

$$K < x \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

をみたす実数 K が存在するとき, $x \to \infty$ のとき $f(x)$ は α に**収束**して, **極限値** α を持つといい,

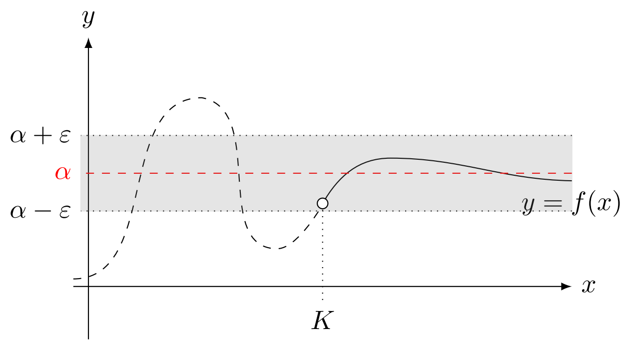
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \alpha$$

または

$$f(x) \to \alpha \qquad (x \to \infty)$$

と記す. また, 収束しないときは**発散**するという.

数列の極限の定義における自然数 n が実数 x に, 項 a_n が関数 $f(x)$ に代わっている. よく似ているが, 値 x が自然数以外の実数のときも考えないといけないことに注意しなくてはならない.



命題 4.2.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

である.

数列の極限 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} 1/n = 0$ とは違う (これはアルキメデスの原理と同値). 関数の極限なので, 証明する必要がある.

証明. $f(x) = 1/x$ とおく. 任意の実数 ε について, $K = 1/\varepsilon$ とおけば, $K > 0$ であり,

$$K < x \iff \frac{1}{x} < \frac{1}{K}$$

である. よって $K < x$ について,

$$|f(x) - 0| = \frac{1}{x} < \frac{1}{K} = \varepsilon$$

が成り立つ. したがって

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

を得る □

特に, 発散しているときで, $f(x)$ の値が限りなく大きくなることもある. このとき, $x \to \infty$ のとき, $f(x)$ は (正の) 無限大に発散すると言う. ε-δ 論法で定義すると次のようになる.

定義 4.3. ある無限開区間 (k, ∞) で定義される関数 $f(x)$ が, 任意の実数 L について

$$K < x \Longrightarrow L < f(x)$$

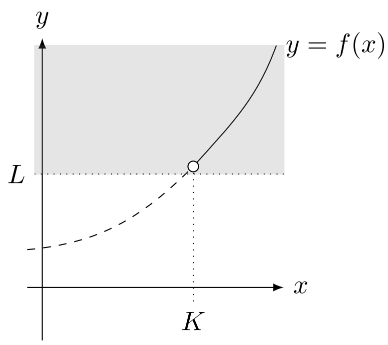
をみたす実数 K が存在するとき, $x \to \infty$ のとき $f(x)$ は **(正の) 無限大に発散**するといい,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

または

$$f(x) \to \infty \qquad (x \to \infty)$$

と記す.



また,

$$\lim_{x \to \infty} (-f(x)) = \infty$$

であるときは, $x \to \infty$ のとき $f(x)$ は**負の無限大に発散**するといい,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

または

$$f(x) \to -\infty \qquad (x \to \infty)$$

と記す.

命題 4.4.

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty$$

である.

$x \to \infty$ のとき $x \to \infty$ は当たり前に思うかもしれないが, 本当だろうか? 想定外のことが起こらないことを示すことも数学では重要であるので証明しておこう. もちろん, 証明可能である.

証明. 混乱を避けるため, $f(x) = x$ とおく. 任意の実数 L について, $L = K$ とおくと, $K < x$ のとき,

$$L = K < x = f(x)$$

が成り立つ. つまり, 任意の実数 L について

$$K < x \Longrightarrow L < f(x)$$

をみたす実数 K が存在する. したがって $\lim_{x\to\infty} x = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ である □

ある無限開区間 $(-\infty, k)$ で定義される関数について $-x$ の値を限りなく大きくする[*9] ときの $f(x)$ については以下のように定義する.

定義 4.5. ある無限開区間 $(-\infty, k)$ で定義される関数 $f(x)$ について, 任意の正の実数 ε について

$$x < K \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

をみたす実数 K が存在するとき, $x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は α に**収束**して, **極限値** α を持つといい,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha$$

または

$$f(x) \to \alpha \qquad (x \to -\infty)$$

と記す. また, 収束しないときは**発散**するという.

問題 4.1.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

を示せ.

定義 4.6. ある無限開区間 $(-\infty, k)$ で定義される関数 $f(x)$ が, 任意の実数 L について

$$x < K \Longrightarrow L < f(x)$$

をみたす実数 K が存在するとき, $x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は **(正の) 無限大に発散**するといい,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$

または

$$f(x) \to \infty \qquad (x \to -\infty)$$

と記し,

$$\lim_{x\to-\infty} (-f(x)) = \infty$$

[*9] 「x の値を限りなく小さくする」の表現だと,「x の値を限りなく 0 に近づける」と解釈することもあるのでこう表現した.

であるとき, $x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は**負の無限大に発散**するといい,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

または

$$f(x) \to -\infty \qquad (x \to -\infty)$$

と記す.

5 まとめと注意

ε-δ 論法を用いた定義を紹介したが, その応用である開近傍を用いた定義もある. 興味があれば, 調べてみることをおすすめする.

$x \to a$ のときの関数 $f(x)$ の極限について考えるとき, 条件 $x \neq a$ をみたす $f(x)$ の値を考えていることを忘れてはならない. つまり, 例え $x = a$ で定義されていたとしても, 極限値が $f(a)$ になるとは限らないし, $x \neq a$ の条件を忘れると, 微分係数も正しく求められない.

数列の極限において「振動する」という単語が登場したかもしれない. 関数の極限においては「振動する」という単語は通常使用しない. 関数の極限は, 数列の極限と同様に以下のように分類される.

$$\begin{cases} \text{収束する } (\lim f(x) = \alpha) \\ \\ \text{発散する} \begin{cases} \text{正の無限大に発散する } (\lim f(x) = \infty) \\ \text{負の無限大に発散する } (\lim f(x) = -\infty) \\ \text{その他} \end{cases} \end{cases}$$

この分類における「その他」(この場合は通常 $\lim f(x)$ の表記を用いない) が数列の「振動する」にあたる. 関数の極限において,「x を動かしたときに $f(x)$ が一定の値でなく, 様々な値を取るから『振動する』というのだ」との考えて「振動する」の表現を使用することは**正しくない**. 今, $f(x) = x$ とおく. x を限りなく大きくなるように動かしたとき, $f(x)$ も一定の値でなく様々な値をとる. しかし, 「$x \to \infty$ のとき, $f(x) = x$ は振動する」とは言わない. 何故なら, $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x = \infty$ であるから, 正の無限大に発散するという. また, $x \to \infty$ のとき, $\sin x$ が発散する理由として, 「$\sin x$ が振動するから」と説明するのをよく目にする. これは, 上記の「その他」を「振動する」と表現すると決めたとしても, 「$x \to \infty$ のとき $\sin x$ が発散するので, 発散する」と言っていることに他ならない. このような説明をしてしまうのは恥ずかしい. 念のため $x \to \infty$ のとき $\sin x$ が発散することを示しておく. なお, 「収束しない」と「発散する」は同値である.

準備として, 次の補題が成り立つことを確認しておく.

補題 5.1. 任意の実数 K について

$$K < x \quad \text{かつ} \quad \sin x = 1$$

をみたす実数 x が存在する.

証明. $\sin(\pi/2) = 1$ であり, 加法定理により

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

が任意の自然数 n でなりたつ. また,

$$K < \frac{\pi}{2} + 2n_0\pi$$

をみたす自然数 n_0 は必ず存在するので,

$$x = \frac{\pi}{2} + 2n_0\pi$$

とすると,

$$K < x \quad \text{かつ} \quad \sin x = 1$$

をみたす □

この補題を用いて, 次の命題を示す. 証明は $x \to \infty$ のとき $\sin x$ が収束すると仮定すると矛盾が生じることを示している.

命題 5.2. $x \to \infty$ のとき $\sin x$ は発散する.

証明. $f(x) = \sin x$ とおく. $x \to \infty$ のとき $\sin x$ が α に収束すると仮定する. このとき, 定義により $\varepsilon = 1/3$ において,

$$K < x \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon = \frac{1}{3} \tag{$*$}$$

をみたす実数 K が存在する. 補題 5.1 により, $K < x_0$ かつ $\sin x_0 = 1$ をみたす x_0 が存在する. $x_1 = x_0 + \pi$ とおけば, $f(x_1) = \sin x_1 = -1$ であり, $(*)$ より

$$|f(x_0) - \alpha| < \frac{1}{3}, \quad |f(x_1) - \alpha| < \frac{1}{3}$$

である. したがって

$$|f(x_0) - f(x_1)| = |f(x_0) - \alpha + \alpha - f(x_1)| \leqq |f(x_0) - \alpha| + |f(x_1) - \alpha| < \frac{2}{3}$$

が成り立つが, 一方

$$|f(x_0) - f(x_1)| = |1 - (-1)| = 2$$

であるので矛盾する. よって, $x \to \infty$ のとき $\sin x$ は発散する □

問題 5.1. $x \to \infty$ のとき $\sin(\pi x)$ が発散することを示せ.

参考書籍

本文に登場する語句や記号, 証明は次の書籍を参考に執筆した. ただし定義や公理は微妙に異なる.

荒井正治	『理工系 微積分学 – 第 3 版 – 』	(学術図書出版社)
吹田信之 · 新保経彦	『理工系の微分積分学』	(学術図書出版社)
杉浦光夫	『基礎数学 2 解析入門 I』	(東京大学出版会)

問題の略解

問題 2.1 例えば $\varepsilon = 1/2$, $\delta = 2$ のとき, $x = a + 1$ は $0 < |x - a| < \delta$ をみたすが, このとき

$$|f(x) - c| = |a + 1 - a| = 1 > \varepsilon$$

となってしまう.

問題 2.2 略. 定義をみたすことを確認すれば良い.

問題 2.4 $f(x) = c$ (c は定数) とおく. 任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta = 1/2$ とおくと $0 < |x - a| < \delta$ のとき

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

が成り立つので $\lim_{x \to a} c = \lim_{x \to a} f(x) = c$ である.

問題 2.7 $f(x) = -x$ とおく. 任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta = \varepsilon$ とおくと $0 < |x - 2| < \delta$ のとき

$$|f(x) - (-2)| = |-x + 2| = |x - 2| < \delta = \varepsilon$$

が成り立つので $\lim_{x \to 2}(-x) = \lim_{x \to 2} f(x) = -2$ である.

問題 2.8 $f(x) = -2x$ とおく. 任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta = \varepsilon/2$ とおくと $0 < |x - 1| < \delta$ のとき

$$|f(x) - (-2)| = |-2x + 2| = 2|x - 1| < 2\delta = \varepsilon$$

が成り立つので $\lim_{x \to 1}(-2x) = \lim_{x \to 1} f(x) = -2$ である.

問題 2.9 $f(x) = cx$ とおく. $c = 0$ のとき, $f(x) = 0$ であるので, 任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta = 1/2$ とすれば良い. $c \neq 0$ のとき, 任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta = \varepsilon/|c|$ とおくと $0 < |x - a| < \delta$ のとき

$$|f(x) - ca| = |cx + ca| = |c||x - a| < |c|\delta = \varepsilon$$

が成り立つ. 以上により, $\lim_{x \to a}(cx) = \lim_{x \to a} f(x) = ca$ である.
上述のように, $c = 0$ のときと $c \neq 0$ で場合分けしなくても, 任意の $\varepsilon > 0$ について $\delta = \varepsilon(|c| + 1)$ としても良い.

問題 2.12 $g(1) = 1$ である. したがって, $\lim_{x \to a} g(x) \neq 1$ を示す. $\varepsilon = 1/3$ のとき,

$$0 < |x - 1| < \frac{1}{6} \Longrightarrow |g(x) - 2| < \varepsilon$$

である. 任意の $\delta (> 0)$ について,

$$\delta_0 = \min\left(\delta, \frac{1}{6}\right)$$

とおくと, $0 < \delta_0 \leqq \delta$ であり,

$$0 < |x - 1| < \delta_0$$

をみたす x は必ず存在する. この x において,

$$|2 - g(1)| = |2 - 1| = |2 - g(x) + g(x) - 1| \leqq |2 - g(x)| + |g(x) - 1|$$

であり, $0 < |x - 1| < 1/6$ もみたすので, $|g(x) - 2| < \varepsilon$ に注意すれば,

$$\begin{aligned} |g(x) - 1| &\geqq |2 - 1| - |g(x) - 2| \\ &> 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ &> \frac{1}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

となってしまい. $\varepsilon = 1/3$ のとき, 任意の $\delta(>0)$ について

$$0 < |x-1| < \delta \Longrightarrow |g(x)-1| > \varepsilon$$

をみたす x が存在する. すなわち, $\varepsilon = 1/3$ のとき

$$0 < |x-1| < \delta \Longrightarrow |g(x)-g(1)| < \varepsilon$$

をみたす正の実数 δ は存在しない. したがって

$$\lim_{x\to 1} g(x) \neq 1 = g(1)$$

である.

問題 3.2 $f(x) = 1/x$ とおく. 任意の実数 $\delta(>0)$ について $0 < |x-0| < \delta$ をみたす負の実数 $x = x_0$ が必ず存在する. 例えば $L = 1$ のとき, $0 < |x_0 - 0| < \delta$ ではあるが,

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0} < 0 < 1 = L$$

となってしまう. (これは, 任意の実数 L について

$$0 < |x-0| < \delta \Longrightarrow f(x) > L$$

をみたす $\delta(>0)$ が存在しないことを言っている.) したがって, $x \to 0$ のとき $f(x) = 1/x$ は正の無限大に発散しない.

問題 4.1 $f(x) = 1/x$ とおく. 任意の $\varepsilon(>0)$ について, $K = -1/\varepsilon$ とおくと, $x < K$ のとき $1/x < 0$ であるので

$$|f(x) - 0| = \left|\frac{1}{x}\right| = -\frac{1}{x} < \varepsilon$$

が成り立つ. よって,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

である.

問題 5.1 $f(x) = \sin(\pi x)$ とおく. $x \to \infty$ のとき $f(x)$ が α に収束すると仮定する. 定義により,

$$K < x \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \frac{1}{3}$$

をみたす実数 K が存在する. 任意の自然数 n について $\sin((2n+1/2)\pi) = 1$ が成り立つので

$$K < x_0 \quad \text{かつ} \quad f(x_0) = \sin(\pi x_0) = 1$$

をみたす実数 x_0 が存在する. $x_1 = x_0 + 1$ とおくと

$$f(x_1) = \sin(\pi(x_0+1)) = -\sin(\pi x_0) = -1$$

である. 今, 仮定より

$$|f(x_0) - f(x_1)| \leqq |f(x_0) - \alpha| + |f(x_1) - \alpha| < \frac{2}{3}$$

であるが, これは

$$|f(x_0) - f(x_1)| = |1 - (-1)| = 2$$

に矛盾する. したがって, $x \to \infty$ のとき $f(x) = \sin(\pi x)$ は発散する.