連立 1 次方程式の具体的な解法とその背景

立命館大学理工学部数学学修相談会

2018 年 9 月 29 日 *

概要

簡単な連立 1 次方程式は高校までの数学ですでに学んできた. その解法は, 未知数を方程式から減らして, 解を絞り込む方法を主に扱う. 具体的には, 加減法や代入法がある. 未知数や方程式が少ない場合や, 解が一意に決まると判明している場合, 高校までの方法で困ることはない. しかし, 未知数や方程式が多くなったり, 解が存在しない場合や解が無数にある場合, 加減法や代入法では複雑な計算が登場し, 混乱に陥ることも多い.

実数係数の連立 1 次方程式の解の個数について大きく分類すると 0, 1, または無限, の 3 つに分類される. 解の個数が 0 の場合「解なし」といい, 個数が無限の場合は一般解を求める必要が生じることも多い. いずれの連立 1 次方程式においても, 解を確実に求める方法として掃き出し法があるが, これは対応する拡大係数行列の簡約化を行っていることに他ならない. 拡大係数行列の簡約化を用いて, 連立 1 次方程式の全ての解を求める方法と, その背景を解説する.

目次

* 執筆 平岡由夫

1 はじめに

連立 1 次方程式の未知なる値を表す文字を未知数といって, 未知数は x, y, z などを高校まででは用いてきた. ここでは未知数を, 様々な値を取りうるという意味で「**変数**」と呼び, 多くの変数を扱う必要もあるので, 変数には x_1, x_2, $\cdots$ など添え字を用いて表すことにする.

また, 慣例に従い, スカラー (実数) は細字のアルファベット c, x など, 行列は細字のアルファベット大文字 A, K など, 特に $n \times 1$ 行列を (n 次) **列ベクトル**といって, 太字のアルファベット小文字 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$ などを用いて表記する. 全ての成分が 0 の列ベクトルを, スカラー 0 と区別し, $\mathbf{0}$(太字の 0) で表記する. また, 実数全体の集合を $\boldsymbol{R}$ (太字の R) で記し, (実数成分の) n 次列ベクトル全体の集合をを $\boldsymbol{R}^n$ で表す. すなわち

$$\boldsymbol{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \,\middle|\, a_1, \cdots, a_n \in \boldsymbol{R} \right\}$$

である. ベクトルや実数全体の集合に用いられる太字のアルファベットは, 同じ意味で "$\mathbb{R}$" のように 2 重線 (「黒板ボールド」という) で表現することもあるが, 今回は用いない.

見慣れないと思われる記号についても説明しておく. "$\forall$" は「任意の」(または「全ての」) を意味し, "$\forall c_1, c_2 \in \boldsymbol{R}$" ("$\forall c_1, \forall c_2 \in \boldsymbol{R}$" と記す場合もある) で「任意の実数 c_1, c_2」(または「全ての実数 c_1, c_2」) を意味する. 記号 "$*$" は「アスタリスク」と呼ばれ, 「小さな星」を意味する. この記号は, コンピュータの言語で積や, 任意の文字列を表す記号としてよく使われ, 本書では式記号や「任意の数」を表す意味で用いる. 記号 "$\dagger$" は「ダガー」と呼び, 「短剣」, 「尖ったナイフ」を意味し, 「短剣符」と呼ばれることもある.

なお, ページの都合上, 行列の簡約化などは途中の変形を省略した. にもかかわらず, 「全く同じ基本変形で $\cdots$」などの表現が頻繁に登場する. このことを体感し, 理解するためには, 実際に簡約化を行う必要がある. 目で読むだけでなく, 実際に手を動かして読み進めることを強く推奨する.

1.1 連立 1 次方程式の様々な表現

n 個の変数 (x_1, x_2, $\cdots$, x_n), m 個の方程式からなる連立 1 次方程式は全て, 定数項を右辺にまとめた

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

と表現できる. 今回は, これを**標準的な連立 1 次方程式**と呼ぶことにする. また,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \vdots \\ \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

とおけば, たった 1 つの等式からなる行列の方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{1.2}$$

を解くことは (1.1) を解くことと同値であることが分かる. さらに, 行列 A の列ベクトルによる分割 $A = \left[\begin{array}{c:c:c:c} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{array}\right]$, つまり

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \cdots, \boldsymbol{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

とすると, 列ベクトルの方程式

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b} \tag{1.3}$$

を解くことは (1.2) を解くことと同値であることも分かる. したがって, (1.1) と (1.2) と (1.3) を解くことは全て同値であり, これら全てを連立 1 次方程式と呼ぶことにする.

また, 定数項が全て 0 (つまり, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$) である方程式を**同次形の連立 1 次方程式**といって, 頻繁に登場する. 同次形の連立 1 次方程式において, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は常に方程式をみたし解となる. つまり, 解は必ず存在する. この解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を同次形連立 1 次方程式の**自明な解**という. 同次形の連立 1 次方程式における, 列ベクトルの方程式は

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

であり, ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の **1 次関係**をみたす方程式という.

行列の方程式 (1.2) は, 中学校で学んだ 1 次方程式 $ax = b$ の a, x, b をそれぞれ $A, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}$ に置き換えた形である. つまり, 連立 1 次方程式は, 1 次方程式 $ax = b$ の一般化と考えることも出来る.

1.2 係数行列, 拡大係数行列

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の行列 A, 行列 A に 1 列 $\boldsymbol{b}$ を付け加えた行列 $K = \left[\begin{array}{c:c} A & \boldsymbol{b} \end{array}\right]$ をそれぞれ, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の**係数行列**, **拡大係数行列**と呼ぶ. 例えば, 連立 1 次方程式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \vdots \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{$*$}$$

について, $(*)$ の係数行列 A, 拡大係数行列 K はそれぞれ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad K = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

である.

注意. A と $\boldsymbol{b}$ の行の数は等しいので, K は綺麗な長方形になり, K のサイズは

$$(A \text{ の行の数}) \times ((A \text{ の列の数}) + 1)$$

である.
また, 拡大係数行列は区切りの記号を用いず

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

と表記しても良い. なお, 標準的な連立 1 次方程式においては, 「n 個の変数, m 個の方程式」の表記も気にしないといけない. 例えば, 「2 個の変数, 2 個の等式」からなる連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

と「3 個の変数, 2 個の等式」からなる連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 = 1 \end{cases}$$

と「3 個の変数, 3 個の等式」からなる連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 = 1 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0 \end{cases}$$

は係数行列や拡大係数行列は異なるし, 解の個数も異なる. 方程式は同値だが, 方程式を解くことについては同値ではない. 行列の方程式だと, 変数の個数 (= 係数行列の列の数) と方程式の個数 (= 係数行列の行の数) が定まるので, このような混乱が生じにくい.

変数の個数, 方程式の個数を固定しておくと, 連立 1 次方程式とその拡大係数行列は 1 対 1 に対応する.

1.3 掃き出し法と拡大行列の簡約化

連立 1 次方程式を解くにあたり, 同値な変形[*1]は全て, 以下の 3 種の変形の繰り返しで得られる:

(1) 1 つの式を $c(\neq 0)$ 倍する.
(2) 2 つの式を入れ替える.
(3) 1 つの式に他の式の c 倍を加える.

この変形を**連立 1 次方程式の基本変形**という. 上記のそれぞれの基本変形において, 連立 1 次方程式 $(*)$ から $(*)'$ への変形と $(*)$ の拡大係数行列 K から $(*)'$ の拡大係数行列 K' への次のそれぞれの変形は同じである:

(1) 1 つの行を $c(\neq 0)$ 倍する.
(2) 2 つの行を入れ替える.
(3) 1 つの行に他の行の c 倍を加える.

この 3 種の変形を**行列の行基本変形**という.

[*1] 記述にはないが, 変数の個数, 式の個数は固定して考える.

$$\begin{array}{ccc} \text{連立 1 次方程式 } (*) & \longleftrightarrow & (*) \text{ の拡大係数行列} \\ \Big\downarrow \text{連立 1 次方程式の基本変形} & & \Big\downarrow \text{行列の行基本変形} \\ \text{連立 1 次方程式 } (*)' & \longleftrightarrow & (*)' \text{ の拡大係数行列} \end{array}$$

どのような連立 1 次方程式 $(*)$ も上記の連立 1 次方程式の基本変形だけを繰り返し用いることにより, 解に最も近い形の連立 1 次方程式 $(*)'$ に変形出来る. この方法で連立 1 次方程式を解くことを**掃き出し法**という. ここで, 解に最も近い形の連立 1 次方程式 $(*)'$ とは, その拡大係数行列 K' が以下の 4 条件 (i), (ii), (iii), (iv) 全てをみたすことをいう:

(i) 行列に 0 だけからなる行があれば, それは 0 以外の成分を持つ行よりも下にある.
(ii) 行列の 0 以外の成分を持つ各行の主成分は全て 1 に限る.
(iii) 各行の主成分は, 下の行の方が上の行より右にある.
(iv) 各行の主成分を含む列の主成分以外の上下の他の成分は全て 0 に限る.

ここで, 行の主成分とは, 0 でない最も左の成分をいう. 本書では, このような「解に最も近い形の連立 1 次方程式 $(*)'$」 を連立 1 次方程式 $(*)$ の**簡約な連立 1 次方程式**と呼ぶことにする.

一般に上記の 4 条件 (i), (ii), (iii), (iv) 全てをみたす行列を**簡約行列**と言う. 例えば, サブテキスト「0006 行列の簡約化」にあるように次の命題が成り立つ.

命題 1.1. 任意の行列は行列の行基本変形を繰り返し用いることにより, 簡約行列に変形出来る.

行列 A を行列の行基本変形の繰り返しにより簡約行列 B に変形すること, 及び, 行列 B のことを A の**簡約化**という. なお, 次の命題が成り立つ[*2].

命題 1.2 (簡約行列の一意性)**.** 行列 A の簡約化 B は唯一通りに定まる.

注意 1.3. 行列の行基本変形は行をひとかたまりに変形しており, 行の成分 a_{ij} が a'_{ij} に変形するとき, a'_{ij} は他の列の成分 a_{ik} $(k \neq j)$ の影響を受けない. つまり, 行列 A を基本変形して行列 B が得られるとき, A の第 j 列だけを同じ基本変形したものは B の 第 j 列と一致する. したがって, 基本変形して 拡大係数行列 $K = \left[\begin{array}{c:c} A & \boldsymbol{b} \end{array}\right]$ が基本変形 $(\dagger)$ で $K' = \left[\begin{array}{c:c} A' & \boldsymbol{b}' \end{array}\right]$ になるならば, 係数行列 A は同じ基本変形 $(\dagger)$ で A' に変形し, 簡約行列の定義により K' が簡約なら A' も簡約になる.

注意 1.4. 列ベクトル $\boldsymbol{a}$ を基本変形して得られる列ベクトルを $\boldsymbol{b}$ としたとき,

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \Longleftrightarrow \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

が成り立ち, 対偶を取れば

$$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0} \Longleftrightarrow \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$$

が成り立つ. すなわち, 行列 A の第 j 列 が $\boldsymbol{0}$ なら, A にいかなる基本変形を施しても, 変形した行列の第 j 列は $\boldsymbol{0}$ のままであるし, 第 j 列 が $\boldsymbol{0}$ でないなら, A にいかなる基本変形を施しても, 第 j 列が $\boldsymbol{0}$ になることはない.

[*2] ベクトル空間の知識を用いると証明は容易であるが, 今回は証明しない.

注意 1.5. 拡大係数行列 K の簡約化を K' としたとき, K に対応する連立 1 次方程式 $(*)$ と K' に対応する標準的な連立 1 次方程式 (これは簡約な連立 1 次方程式でもある)$(*)'$ は同値である.

$$\begin{tikzcd}
\text{連立 1 次方程式 } (*) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\Updownarrow"] & (*) \text{ の拡大係数行列 } K \arrow[d, "\text{簡約化}"] \\
\begin{array}{c} K' \text{ に対応する} \\ \text{標準的な連立 1 次方程式 } (*)' \end{array} & \text{簡約行列 } K' \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

1.4 行列の階数

連立 1 次方程式について考察する場合, 後で登場するように, 「行列の階数」の考えは非常に役立つので定義しておく.

定義 1.6. 行列 A の簡約化を B とする. B の主成分の個数[*3]を行列 A の**階数**と言って, 行列 A の階数が n であるとき, $\mathrm{rank}(A) = n$ と表す.

2 具体的な解法

2.1 解が唯一の例

例題 2.1. 次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{$*$}$$

(解説) 係数行列のサイズにより, 3 変数, 3 等式の連立 1 次方程式である. 拡大係数行列の簡約化によって解く.
(解答)

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

とおく. $(*)$ の拡大係数行列 K を簡約化すると

$$K = \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow K' = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

を得る. K' に対応する (簡約な) 連立 1 次方程式に戻すと

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2+x_3} = 1 \\ \phantom{x_1+{}} x_2 \phantom{{}+x_3} = -1 \\ \phantom{x_1+x_2+{}} x_3 = 2 \end{cases} \tag{$*$'}$$

[*3] 正確には「B の行のうち, 主成分を含む行の個数」であり, これは「B の行のうち,『0 だけからなる行』以外の行の個数」や「B の主成分を含む列の数」でもある.

である. 連立 1 次方程式 $(*)$ と $(*)'$ は同値であるので, 唯一つの解

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

を得る.

注意 2.2. 例題 2.1 により, 標準的な連立 1 次方程式

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

や, 列ベクトルの方程式

$$x_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{$**$}$$

の解はどちらも

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

つまり

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

に限る.

なお, 列ベクトルの方程式 $(**)$ は

$$\text{列ベクトル} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \text{を} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{の 1 次結合で表せ}$$

と問われることと同じである.

例題 2.3. 次の連立 1 次方程式を解け.

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{$*$}$$

(解答) $(*)$ の拡大係数行列 K を簡約化すると

$$K = \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow K' = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

を得る. K' に対応する (簡約な) 連立 1 次方程式に戻すと

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases} \tag{$*$}'$$

である. 連立 1 次方程式 $(*)$ と $(*)'$ は同値であるので, 唯一つの解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

を得る.

注意 2.4. 一般に, n 変数の連立 1 次方程式に対応する拡大係数行列 K の簡約化 K' が

$$K' = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & \cdots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b'_2 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b'_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

の様に, K' から 0 だけの行を取り除いた行列が

$$\left[\begin{array}{c:c} E_n & \boldsymbol{b}' \end{array}\right]$$

の形であるとき, その連立 1 次方程式には唯一の解が存在することが分かる. ここで E_n は n 次の単位行列を表す.

主成分の個数に注目して考えてみると,

$$\begin{cases} (A' \text{ の主成分の個数}) = (K' \text{ の主成分の個数}) \\ \text{かつ} \\ (A' \text{ の主成分の個数}) = (\text{変数の個数}) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \text{連立 1 次方程式に唯一の解が存在する}$$

が分かる. 行列の階数, $n(=$ 変数の個数$)$ を用いて言うならば

$$\begin{cases} \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(K) \\ \text{かつ} \\ \operatorname{rank}(A) = n \end{cases} \Longrightarrow \text{連立 1 次方程式に唯一の解が存在する}$$

となる.

2.2 解が存在しない例

例題 2.5. 次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{$*$}$$

(解説) 係数行列のサイズにより, 5 変数, 4 等式の連立 1 次方程式である. 拡大係数行列の簡約化によって, 連立 1 次方程式を変形する.
(解答)

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

とおく. $(*)$ の拡大係数行列 K を簡約化すると

$$K = \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow K' = \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

を得る. K' に対応する (簡約な) 連立 1 次方程式に戻すと

$$\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 \qquad - 2x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad (*)'$$

である. 連立 1 次方程式 $(*)$ と $(*)'$ は同値であるが, $(*)'$ の第 3 式の左辺 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 にどのような値を代入しても 0 であるから, 第 3 式をみたす x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 は存在しない. したがって, 連立 1 次方程式 $(*)$ は解を持たない.

注意 2.6. 連立 1 次方程式に対応する係数行列 A の簡約化を A', 拡大係数行列 K の簡約化を K' とする. 一般に

$$K' = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * & 0 \\ * & * & \cdots & * & \vdots \\ * & * & \cdots & * & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

の様に, K' に $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (灰色部分) の行が現れるとき, 解は存在しない.

主成分の個数に注目して考えてみる. この行の最後の成分 1 は K' の主成分であり, 簡約行列 K' の最後の 1 列を取り除いた A' も簡約行列であるので, このような K' においては

$$(K' \text{ の主成分の個数}) = (A' \text{ の主成分の個数}) + 1$$

となる. A' の主成分の個数と K' の主成分の個数が異なるときに, この行が現れることに注目すれば, 「A' の主成分の個数と K' の主成分の個数が異なるとき, その連立 1 次方程式には解が存在しない」と言える. 対偶をとると

$$\begin{aligned} &\text{連立 1 次方程式に解が存在する} \\ &\Longrightarrow (A' \text{ の主成分の個数}) = (K' \text{ の主成分の個数}) \end{aligned}$$

を得るので, 行列の階数を用いて言うならば

$$\text{連立 1 次方程式に解が存在する} \Longrightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(K)$$

となる.

2.3 一般解を持つ例

連立 1 次方程式によっては, 解を複数持つ場合がある. この場合, それら全ての解を求めることが要求されることもある. その全ての解を任意定数を用いて表したものを**一般解**という.

例題 2.7. 次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix} \tag{$*$}$$

(解答)

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

とおく. $(*)$ の拡大係数行列 K を簡約化すると

$$K = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & 8 \end{array}\right] \longrightarrow K' = \left[\begin{array}{cccc:c} \boxed{1} & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 2 \end{array}\right]$$

を得る.

(解説) 簡約行列の主成分を灰色に塗りつぶしてある.

(解答のつづき) K' に対応する (簡約な) 連立 1 次方程式に戻すと

$$\begin{cases} \boxed{x_1} \qquad\qquad + 3x_4 = 1 \\ \qquad\qquad \boxed{x_3} - x_4 = 2 \end{cases} \tag{$*$}'$$

である. 連立 1 次方程式 $(*)$ と $(*)'$ は同値である.

(解説) 解が唯一つであったときは, ここで解が決定できたが, 解が複数ある場合は, 主成分に対応する変数 (灰色部分) が左辺に残るようにさらに変形する.

(解答の続き)

$$(*)' \iff \begin{cases} \boxed{x_1} = 1 - 3x_4 \\ \boxed{x_3} = 2 + x_4 \end{cases}$$

である.

(解説) 最後の等式は主成分に対応しない変数 (= 左辺にない変数) を勝手に決めると左辺の変数が全て決定できることを意味している. また, この例のように, 主成分に対応しない変数が複数ある場合同じ値であるとも限らないので, バラバラに与える.

(解答の続き) 主成分に対応しない変数 x_2, x_4 に任意の実数を与えると, 主成分に対応する変数 x_1, x_3 の値が決まる. すなわち $x_2 = c_1$, $x_4 = c_2$ とおくと,

$$\begin{cases} \boxed{x_1} = 1 - 3c_2 \\ \boxed{x_3} = 2 + c_2 \end{cases}$$

と決まる. よって, このとき

$$\begin{cases} x_1 = 1 \qquad - 3c_2 \\ x_2 = \quad c_1 \\ x_3 = 2 \qquad + c_2 \\ x_4 = \qquad\quad c_2 \end{cases}$$

である. 列ベクトルの 1 次結合で表すと

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{$**$}$$

を得る.

(解説) これで, 「よって解は $\cdots$」としたくなるが, 本当は良くない. ここまで示したことは, 「与えられた方程式 $(*)$ の解は, $(**)$ の形である」だけである. だから, $(**)$ が解であることを示す必要がある. 言い換えると, $(*)$ の解 $\boldsymbol{x}$ 全体の集合を S, 任意の実数 c_1, c_2 を用いて $(**)$ で表される $\boldsymbol{x}$ 全体の集合を S' とおけば, ここまでの議論で $S \subset S'$ だけを示したことになる. S が空集合であるかもしれないし, S' の中に S に含まれない元が存在するかもしれない. 以下 $S \supset S'$ であることを示し, 最終的に $S = S'$ を言う.

(解答の続き) 任意の実数 c_1, c_2 について $(**)$ は $(*)'$ をみたすので, $(*)'$ の解である. また, $(*)'$ は $(*)$ と同値であるので, 任意の実数 c_1, c_2 における $(**)$ は $(*)$ の解である. よって, $(*)$ の (一般) 解

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\forall c_1, c_2 \in \boldsymbol{R})$$

を得る.

注意 2.8. 任意の実数 c_1, c_2 における $(\dagger)$ が $(*)$ と $(*)'$ の同値性から $(*)$ をみたすことを示したが, 与えられた連立 1 次方程式 $(*)$ に $(**)$ を直接代入することでも言える.

(解答の続き (別バージョン)) 任意の実数 c_1, c_2 について, $(*)$ に $(**)$ を代入してみると

$$\begin{aligned}
((*) \text{ の左辺}) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix} \\
&= ((*) \text{ の右辺})
\end{aligned}$$

となって, $(*)$ をみたすことが分かる. したがって $(*)$ の (一般) 解

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\forall c_1, c_2 \in \boldsymbol{R})$$

を得る.

としても良い.

注意 2.9. 一般解を表現するのに用いた任意に与える実数 c_i $(i=1,2)$ を**任意定数**という.

連立 1 次方程式に対応する係数行列 A の簡約化を A', 拡大係数行列 K とする. この例においても, 解が唯一つ存在する場合と同じく

$$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(K)$$

が成り立っている.

また, 任意定数の個数は, A' の主成分に対応しない変数の個数に等しく,

$$(\text{任意定数の個数})=(\text{変数の個数})-\operatorname{rank}(A)$$

である. したがって, 任意定数の個数が 0 の場合, すなわち

$$(\text{変数の個数})=\operatorname{rank}(A)$$

の場合は解が唯一つに定まることを意味する.

一般解は任意定数がついている列ベクトルと付いていない列ベクトルの和で表されている. $(**)$ を直接, $(*)$ に代入してみれば計算過程から予想できると思われるが, 任意定数が付いている列ベクトルは何者であるかを確認するために次の例題を考える.

例題 2.7 の $(*)$ において, 右辺の定数項にあたる列ベクトルを $\mathbf{0}$ に換えた同次形の連立 1 次方程式を考える.

例題 2.10. 次の同次形連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{$*_0$}$$

(解答)

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

とおく. $(*_0)$ の拡大係数行列 K を簡約化する[*4]と

$$K=\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right]\longrightarrow K'=\left[\begin{array}{cccc:c} \boxed{1} & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \end{array}\right]$$

を得る.

K' に対応する (簡約な) 連立 1 次方程式に戻すと

$$\begin{cases} \boxed{x_1} \qquad\quad + 3x_4 = 0 \\ \qquad\quad \boxed{x_3} - \ \ x_4 = 0 \end{cases} \tag{$(*_0)'$}$$

である. 連立 1 次方程式 $(*_0)$ と $(*_0)'$ は同値である.

$$(*_0)' \iff \begin{cases} \boxed{x_1} = -3x_4 \\ \boxed{x_3} = \quad\ x_4 \end{cases}$$

[*4] 練習のため拡大係数行列の簡約化を行ったが, 定数項部分の $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ は行列の行の基本変形で変化しないので, 同次形の連立 1 次方程式は係数行列の簡約化を行えば良い.

より, 主成分に対応しない変数 x_2, x_4 に任意の実数を与えると, 主成分に対応する変数 x_1, x_3 の値が決まる. すなわち $x_2 = c_1$, $x_4 = c_2$ とおくと,

$$\begin{cases} x_1 = & -3c_2 \\ x_3 = & c_2 \end{cases}$$

と決まる. よって, このとき

$$\begin{cases} x_1 = & & -3c_2 \\ x_2 = & c_1 & \\ x_3 = & & c_2 \\ x_4 = & & c_2 \end{cases}$$

である. 任意の実数 c_1, c_2 において, これは $(*_0)$ もみたすので, $(*_0)$ の一般解

$$\boldsymbol{x} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} (\forall c_1, c_2 \in \boldsymbol{R})$$

を得る.

注意 2.11.

$$\boldsymbol{d}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{d}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{d}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とおくと, 例題 2.7 $(*)$ の一般解は

$$\boldsymbol{d}_0 + c_1\boldsymbol{d}_1 + c_2\boldsymbol{d}_2 \qquad (\forall c_1, c_2 \in \boldsymbol{R})$$

で, 例題 2.10 $(*_0)$ の一般解は

$$c_1\boldsymbol{d}_1 + c_2\boldsymbol{d}_2 \qquad (\forall c_1, c_2 \in \boldsymbol{R})$$

である. つまり,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

とおけば, 例題 2.10 における同次形の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解と, 例題 2.7 における連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解には共通の列ベクトル $\boldsymbol{d}_1$, $\boldsymbol{d}_2$ が現れており,

$$\boldsymbol{d}_0 + (\text{同次形の連立 1 次方程式 } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ の解})$$

が連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解となっている. これは偶然ではない. 何故なら, 例題 2.7 における $(*)$ の拡大係数行列の簡約化の際の基本変形と全く同じ基本変形で例題 2.10 における $(*_0)$ の拡大係数行列の簡約化が行えるからである.

一般解において, 任意定数を特定の値に固定したときに得られる解を**特殊解**という. 上記における $\boldsymbol{d}_0$ は, $(*)$ の一般解において, 特に $c_1 = c_2 = 0$ としたときの列ベクトルであり, $(*)$ の特殊解の 1 つである. $\boldsymbol{d}_0$ のように, 上記のように拡大係数行列の簡約化を用いて解いたとき, 一般解における全ての任意定数を 0 としたときの特殊解を, 本書では, **proper な特殊解**と呼ぶことにする. 解を持つ連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ において, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ のときは $\boldsymbol{0}$ でない proper な特殊解 $\boldsymbol{d}_0$ が存在し, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解は

$$\boldsymbol{d}_0 + (\text{同次形の連立 1 次方程式 } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ の解})$$

と表される.

2.4 連立 1 次方程式における proper な特殊解の求め方

同次形ではない連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ において, proper な特殊解を求めてみる.

例題 2.12. 次の $A, \boldsymbol{b}$ における連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ $\cdots$ $(*)$ の proper な特殊解 $\boldsymbol{d}_0$ を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(解答)

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

とする. $(*)$ の拡大係数行列 K を簡約化して,

$$K = \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{基本変形 }(\dagger)]{\text{簡約化}} K' = \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

を得る.

(解説) (変数の個数) $-$ $\operatorname{rank}(K) = 5 - 3 = 2$ であるのでこのまま一般解を求めると, 任意定数の個数は 2 となる. proper な特殊解 $\boldsymbol{d}_0$ は, 一般解の任意定数をすべて 0 にしたものなので, 主成分に対応しない 2 個の変数はすべて 0 とした方程式

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \\ x_5 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

の解が $\boldsymbol{d}_0$ となる.

(解答の続き) ここで, 主成分に対応しない 2 個の変数はすべて 0 とし, 係数行列の列と, 対応する変数を並び替えた 3 変数の方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{$*_0$}$$

を考える.

(解説) これは

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

を解くことと同じである.

(解答の続き) $(*_0)$ に対応する拡大係数行列 K_0 に先ほどの K の簡約化の際と全く同じ基本変形 $(\dagger)$ を施すと, 簡約行列

$$K_0' = \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

を得る．今, $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}(K_0) = 3 =$ (変数の個数) をみたすので, 唯一の解

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_3 = -1 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

を得る．今,

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

は

$$\begin{bmatrix} 1 & * & 0 & * & 0 \\ 2 & * & 1 & * & 1 \\ 2 & * & 1 & * & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

をみたし, $(*)$ の解である．また, 上記の求め方により, $(*)$ の proper な特殊解

$$\boldsymbol{d}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

を得る．

注意 2.13. $\operatorname{rank}(A) \neq \operatorname{rank}(K)$ なら特殊解どころか, 解は存在しない．$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(K)$ かつ $\operatorname{rank}(A) \neq$ (連立 1 次方程式の変数の個数) の時は上記の方法で, 特殊解を求める事が出来る．特に, 同次形の連立 1 次方程式においては特殊解は $\mathbf{0}$ と考えれば良い．

注意 2.14. 以上の考察を一般化すると, n 変数の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ において, $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ の場合はいつでも $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(K)$ が成り立ち, 自明な解が必ず存在するし, $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$ の場合は $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(K)$ なら proper な特殊解 $\boldsymbol{d}_0$ が必ず存在するので

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(K) \Longrightarrow \text{連立 1 次方程式に解が存在する}$$

が成り立つ．

3 行列の階数と連立 1 次方程式の解

行列の階数と連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の関係をまとめておく．

定理 3.1. 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列を K とすると

$$\text{連立 1 次方程式 } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ が解を持つ} \Longleftrightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(K)$$

注意 3.2. 特に同次形の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ は自明な解をもち, $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(K)$ が成り立つ．

また, n 変数の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が唯一つの解しか持たないのに, その拡大係数行列 K について $\mathrm{rank}(K) \neq n$ なら, 他の解も持つことになってしまうので, 次の定理を得る.

定理 3.3. n 変数の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列を K とすると

$$\text{連立 1 次方程式 } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ が唯一つの解を持つ} \iff \begin{cases} \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(K) \qquad \cdots \qquad (*) \\ \text{かつ} \\ \mathrm{rank}(A) = n \end{cases}$$

注意 3.4. 条件 $(*)$ は重要である. 例えば n 変数の連立 1 次方程式に対応する拡大係数行列 K の簡約化 K' が

$$K' = \left[\begin{array}{ccc:c} & E_n & & \boldsymbol{0} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]$$

となったら, $\mathrm{rank}(A) = n$ はみたすが解は存在しない.

同次形の連立 1 次方程式においては次の定理が成り立つ.

定理 3.5.

$$n \text{ 変数の同次形の連立 1 次方程式 } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ の解は自明な解 } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ に限る} \iff \mathrm{rank}(A) = n$$

$m \times n$ の行列 A において, 階数の定義により

$$\mathrm{rank}(A) \leqq m \qquad \text{かつ} \qquad \mathrm{rank}(A) \leqq n$$

が成り立つので, $m < n$ のとき, $\mathrm{rank}(A) < n$ である. したがって, 定理により次の系を得る.

系 3.6. $m \times n$ の行列 A を係数行列とする同次形の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \cdots \quad (*)$ においては

$$m < n \Longrightarrow (*) \text{ は自明でない解を持つ}$$

が成り立つ.

注意 3.7. つまり, 係数行列が「横長な行列」である同次形の連立 1 次方程式は一般解を持つ.

4 解空間

$m \times n$ 行列 A を係数とする同次形の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解全体の集合を V とおく. すなわち,

$$V = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

とおく. V はベクトル空間と呼ばれる性質をもった解の集合であり, 特に $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の**解空間**と呼ばれる. 解空間は, ベクトル空間について最初に学ぶときに具体例としてよく登場するので覚えておけば良い.

$\mathrm{rank}(A) = n$ のときは, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は自明な解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \in \boldsymbol{R}^n$ に限る[*5] ので, たった一つの元からなる集合と等しく,

$$V = \{\boldsymbol{0}\}^{*6}$$

[*5] 同次形の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の右辺の $\boldsymbol{0}$ は m 次で, 自明な解の $\boldsymbol{0}$ は n 次である. $m \neq n$ のときは同じ記号 $\boldsymbol{0}$ だが, サイズが異なることに注意.

[*6] 空集合ではない.

である．$\mathrm{rank}(A) \neq n$ のときは, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の一般解は, $\ell(= n - \mathrm{rank}(A))$ 個の列ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_\ell \in \boldsymbol{R}^m$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_\ell\boldsymbol{v}_\ell \qquad (\forall c_1, c_2, \cdots, c_\ell \in \boldsymbol{R})$$

と表せる.[*7] したがって, このとき

$$V = \{c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_\ell\boldsymbol{v}_\ell \mid c_1, c_2, \cdots, c_\ell \in \boldsymbol{R}\}$$

となることを理解しておこう．なお, どちらの場合も $\boldsymbol{0} \in V$ である.

参考書籍

本文に登場する語句や記号は次の書籍を参考に執筆した.

三宅敏恒　『入門線形代数』　(倍風館)

[*7] 本書では $\boldsymbol{v}_i$ でなく, $\boldsymbol{d}_i$ で説明した.