簡約行列の一意性

立命館大学理工学部数学学修相談会

2018 年 10 月 4 日 *

概要

連立 1 次方程式の解を求める際に, 拡大係数行列の簡約化を行うことを学ぶ. しかしながら, 行列の簡約化において, 繰り返される基本変形は 1 通りではない. 例えば

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -6 \end{bmatrix}$$

に

基本変形

(1) 第 2 行に第 1 行の (-2) 倍を加える.

(2) 第 2 行を (-1) 倍する.

(3) 第 1 行に第 2 行の (-1) 倍を加える.

(4) 第 3 行に第 2 行の 3 倍を加える.

や

基本変形

$(1)'$ 第 1 行に第 3 行の 1/3 倍を加える.

$(2)'$ 第 2 行に第 1 行の (-1) 倍を加える.

$(3)'$ 第 3 行に第 2 行の 3 倍を加える.

を施すと, どちらも同じ簡約行列

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

に変形される. 実は, 行列 A を簡約化するとき途中の基本変形によらず, 最終的には同じ簡約行列 B が得られること (これを簡約行列の一意性という) が証明できるのだが, この証明はベクトル空間の知識を用いた方が容易なので, ベクトル空間を学んだ後に改めて示すことが多い. 本書では, ベクトル空間の知識を復習しながら, 行列の簡約化が (基本変形の順によらず) 一意的に定まることを説明する.

目次

* 執筆 平岡由夫

1 はじめに

実数全体の集合を $\boldsymbol{R}$ (太字のアルファベット R) で記し, 行列の時に学んだ列ベクトルを含む一般のベクトルは $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{x}$ など太字のアルファベット小文字を用いて記し, a, b, c など細字アルファベット小文字のスカラー (実数) と区別する. 行列もスカラーと区別するために A, B など細字のアルファベット大文字を用いる. 集合を表す文字も, 細字のアルファベット大文字を用いることが慣例となっていて, 本書でもベクトル空間と呼ばれる集合に V を用いている. 行列と間違わないように注意してもらいたい.

$m \times n$ 行列 A の簡約化が唯一つの B になることを示すのに, A や B の各列を n 個の $m \times 1$ 行列に列分割して考える. この $m \times 1$ 行列を m 次列ベクトルといい, その全体の集合を $\boldsymbol{R}^m$ で表す. すなわち

$$\boldsymbol{R}^m = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \middle| \, a_1, a_2, \cdots, a_m \in \boldsymbol{R} \right\}$$

とする. 全ての成分が 0 である $m \times 1$ 行列を $\mathbf{0}$ で表すが, 行の数が異なれば, 等しくない. 例えば,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

などは全て, 同じ $\mathbf{0}$ で表すが等しくない. 慣れないうちは間違えやすいので, 本書では成分が全て 0 の $m \times 1$ 行列を場合によっては $\mathbf{0}_m$ と記すこともある.

記号 “$\forall$” は「任意の」(または「全ての」) を意味し, “$\forall a, b \in \boldsymbol{R}$” (“$\forall a, \forall b \in \boldsymbol{R}$” と記す場合もある) で「任意の実数 a, b」(または「全ての実数 a, b」) を意味する.

念のため, 「2 準備」でベクトル空間の定義など証明に必要なことを記述しておくが, 既に学んだものは, 飛ばして読んで*[1]良い.

2 準備

2.1 ベクトル空間

「空間」という言葉は高校時代にも出てきたと思うが, (大学以降の) 数学において「空間」とは特別な集合を意味し, 高校までの「空間」とは意味が異なる*[2].

数学において, 集合を扱う場合, 単なる「ものの集まり」だと議論が発展しにくい. 国は, そこに住む人間を集めただけでなく, 憲法などの決まりも含めて国として考えるのが普通である. 同様に, 数学では集合に演算な

*[1] 「飛ばして読む」は素早く読むの意味.
*[2] もちろん「空間ベクトル」と「ベクトル空間」も意味が異なる. 念のため.

どの「決まり」[*3]を定義しておいて，「決まり」を伴う集合として考えることがよくあり, 同じ元からなる集合でも，「決まり」が異なれば, 別の集合として扱うこともある．以下で紹介するベクトル空間とは, 2 つの演算が定義された次のような集合である．

以下の 2 条件をみたす空集合でない集合 $V(\neq \emptyset)$ を考える．

(I) $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対して $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in V$ をみたす**和**[*4]が定義される．

(II) $\forall \boldsymbol{u} \in V$, $\forall c \in \boldsymbol{R}$ に対して $c\boldsymbol{u} \in V$ をみたす**スカラー倍**が定義される．

この集合 V が, 以下の (1)〜(8) をみたすとき V を ($\boldsymbol{R}$ 上の) **ベクトル空間**という．

ベクトル空間の性質

(1) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ $(\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V)$

(2) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ $(\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V)$

(3) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$ $(\forall \boldsymbol{u} \in V)$ をみたす $\boldsymbol{0}$ が V に存在する．

(4) $a(b\boldsymbol{u})=(ab)\boldsymbol{u}$ $(\forall \boldsymbol{u} \in V, \forall a, b \in \boldsymbol{R})$

(5) $(a+b)\boldsymbol{u}=a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{u}$ $(\forall \boldsymbol{u} \in V, \forall a, b \in \boldsymbol{R})$

(6) $a(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=a\boldsymbol{u}+a\boldsymbol{v}$ $(\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V, \forall a \in \boldsymbol{R})$

(7) $1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$ $(\forall \boldsymbol{u} \in V)$

(8) $0\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ $(\forall \boldsymbol{u} \in V)$

ベクトル空間の元を**ベクトル**といい, 上記 (3) の $\boldsymbol{0}$ を V の**零ベクトル**という．なお, ベクトル空間 V の零ベクトルであることを明示したいときは $\boldsymbol{0}_V$ と記す．

注意 2.1. 性質 (5) と (8) により

$$\boldsymbol{u}+(-1)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$$

である．この性質はよく登場する．

例 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$, $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$ について

$$a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}=c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v} \iff (a-c)\boldsymbol{u}+(b-d)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$$

が成り立つ．

例 2.1. m 次列ベクトル全体の集合を V とする．すなわち

$$V=\boldsymbol{R}^m=\left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \middle| \, a_1, \cdots, a_m \in \boldsymbol{R} \right\}$$

とする．このとき V は,

$$\forall \boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \in V, \qquad \forall c \in \boldsymbol{R}$$

[*3] 「2 つの元が等しい」や「集合の元である」も定義されている．

[*4] 和を表す演算記号として, “+” を用いるが, 集合によっては小学校以来の「足し算」とは異なるものを定義することもある．

に対して, V の和とスカラー倍を行列の和とスカラー倍, すなわち

$$\text{(和)}\qquad \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_m+v_m \end{bmatrix}$$

$$\text{(スカラー倍)}\quad c\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} cu_1 \\ \vdots \\ cu_m \end{bmatrix}$$

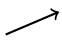
と定義すれば, ベクトル空間である. (したがって, V の元を列ベクトルと読んでいた.) また, このとき

$$\boldsymbol{0}_V=\boldsymbol{0}_m=\left.\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right\} m$$

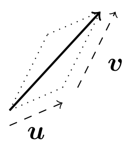
である.

高校の数学においても「ベクトル」という言葉は登場した. これは次のような集合の元のことをいう.

例 2.2. 平面上の (方向) ベクトル[*5]全体の集合を V_g とする.

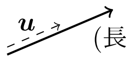
$\forall\boldsymbol{u}=$ , $\boldsymbol{v}=$  $\in V_g, \qquad c\in\boldsymbol{R}$

に対して, 和を「矢印の足し算」[*6], すなわち

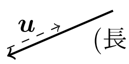
(和) $\quad\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=$ 

と定義し, スカラー倍を $c<0$ の時は向きを反対にし, それ以外の時は向きはそのままで矢印の長さを $|c|$ 倍, すなわち

(スカラー倍) $\quad c\boldsymbol{u}=\begin{cases} \text{(図)} \\ \text{(図)} \end{cases}$



(長さが $\boldsymbol{u}$ の $|c|$ 倍) $\qquad (c\geqq 0$ のとき)



(長さが $\boldsymbol{u}$ の $|c|$ 倍) $\qquad (c<0$ のとき)

と定義すれば, V_g はベクトル空間になる. したがって, その元を「ベクトル」と呼んでも良い.

また, 高校時代の数学で次のような実数の組 (「ベクトルの成分」) も学んでいる. これは次のような集合の元である.

例 2.3. 2 つの実数の組 (x,y) 全ての集合を V_e, すなわち

$$V_e=\{(x,y)\mid x,y\in\boldsymbol{R}\}$$

とする. このとき V_e は,

$$\forall\boldsymbol{u}=(u_1,u_2),\boldsymbol{v}=(v_1,v_2)\in V_e,\qquad \forall c\in\boldsymbol{R}$$

[*5] 方向と長さがきまる幾何学的な矢印.

[*6] 小中学校で学んだ「足し算」とは異なるが, 演算記号 “+” を用いる.

に対して, 和とスカラー倍を

$$(\text{和}) \qquad \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=(u_1+v_1, u_2+v_2)$$

$$(\text{スカラー倍}) \quad c\boldsymbol{u}=(cu_1, cu_2)$$

と定義すれば, ベクトル空間である.

V_g と V_e は異なる集合であり, その元も全く異質なものである. しかし, V_g から V_e へのある対応により, これらは同じベクトル空間と見なすことが可能になる. 高校数学でも V_g のベクトルを V_e のベクトルで表し (ベクトルの成分表示) 代数計算を可能にしたが, この方法が正しいことは証明しなかった. 実は, ベクトル空間の基 (基底) や線形写像の知識を使うと証明できる*7.

上述の例の他にも, 集合によっては和とスカラー倍を上手く定義して, ベクトル空間に出来ることがある.*8

問題 2.4. 実数 x に対して定まる実数 e^x 全体の集合を V, つまり

$$V=\{e^x \mid x\in \boldsymbol{R}\}$$

とする. この V がベクトル空間になるような和とスカラー倍を定義し, V の零ベクトルを答えよ.

簡約行列の一意性を考える上では, $\boldsymbol{R}^m$ だけを必要とし, 上述のような一般のベクトル空間はそれほど登場しない.

2.2 連立 1 次方程式と行の基本変形

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix} a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{m2}\end{bmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_n=\begin{bmatrix} a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}\in \boldsymbol{R}^m$$

についての列ベクトルの方程式

$$x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b} \tag{2.1}$$

を解くことは,

$$((2.1)\text{ の左辺})=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{bmatrix}$$

であるので, n 個の変数, m 個の方程式からなる連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \qquad\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

を解くことと同じである. また,

*7 本書では証明しない.

*8 もちろん, 出来ないこともある.

行列の (行) 基本変形

(1) 1 つの行を $c(\neq 0)$ 倍する.

(2) 2 つの行を入れ替える.

(3) 1 つの行に他の行の c 倍を加える.

を用いて, 連立 1 次方程式の拡大係数行列 K を K' に変形したとき K に対応する連立 1 次方程式と K' に対応する連立 1 次方程式は同値であった. 今後, 行列の行基本変形を, 単に基本変形と呼ぶこともある.

2.3 1 次関係

V をベクトル空間とする. このとき, ベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ が, ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \in V$ とスカラー $c_1, \cdots, c_n \in \boldsymbol{R}$ を用いて,

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n$$

と表されるとき, ベクトル $\boldsymbol{v}$ は ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ の **1 次結合** (または**線形結合**) で表されるという.

特に, $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \in V$ の 1 次結合で $\boldsymbol{0}_V \in V$ が表されるとき, すなわち

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0}_V$$

をみたすスカラー $c_1, \cdots, c_n \in \boldsymbol{R}$ が存在するとき, ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ は (スカラー $c_1, \cdots, c_n$ により)**1 次関係** (または**線形関係**) をみたすという.

注意 2.2. $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \in V$ について $c_1 = 0, \cdots, c_n = 0$ のときはいつでも

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0}_V$$

が成り立つので, ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ はスカラー $c_1 = 0, \cdots, c_n = 0$ により 1 次関係をみたす. これをベクトル $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ の**自明な 1 次関係**という.

$V = \boldsymbol{R}^m$ のときは, 1 次関係をみたすかどうかは次のように同次形の連立 1 次方程式の解について考えることと同じである. 列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \in V$ についての (変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関する) 同次形連立 1 次方程式

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}_m \tag{$*$}$$

の解が

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

であるとき, ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は (スカラー $c_1, c_2, \cdots, c_n$ により)1 次関係をみたす.

行列の行基本変形の性質より, 次の命題を得る.

命題 2.3. 行列 K の第 j 列が $\boldsymbol{0}$ であったならば, K に基本変形を施して行列 K' が得られるならば, K' の第 j 列も $\boldsymbol{0}$ となる.

$$K = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right] \xrightarrow{\text{基本変形}} K' = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} *' & \cdots & *' & 0 & *' & \cdots & *' \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ *' & \cdots & *' & 0 & *' & \cdots & *' \end{array}\right]$$

注意 2.4. 命題 2.3 と K' に基本変形を施すことにより K が得られることにより,

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \cdots, \boldsymbol{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^m$$

のとき,

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

に基本変形を施して

$$A' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}'_1 & \boldsymbol{a}'_2 & \cdots & \boldsymbol{a}'_n \end{bmatrix}$$

が得られるならば,

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}_m \iff x_1\boldsymbol{a}'_1 + x_2\boldsymbol{a}'_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}'_n = \boldsymbol{0}_m$$

が成り立つ. つまり, このとき

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}_m \iff c_1\boldsymbol{a}'_1 + c_2\boldsymbol{a}'_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}'_n = \boldsymbol{0}_m$$

であるので, 1 次関係の言葉で言い換えると $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ がスカラー $c_1, c_2, \cdots, c_n$ で 1 次関係をみたすなら $\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_n$ も同じスカラー $c_1, c_2, \cdots, c_n$ で 1 次関係をみたし, 逆も成り立つ.

例

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$$

について, 行列 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix}$ の第 1 行に第 2 行の (-1) 倍を加えると

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

が得られるので,

$$c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (*)$$
$$\iff c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (*)'$$

が成り立つ. この意味をしっかり理解しておこう. 例えば, 同じ $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = -6$ で, $(*)$ と $(*)'$ のどちらもみたす.

2.4 1 次独立と 1 次従属

ベクトル空間 V の n 個のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ について, どのベクトルも他の $(n-1)$ 個のベクトルの 1 次結合で書き表せないとき, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ は 1 次独立であると定義したい. その為には, どう定義しておけば良いかを具体例で考えてみる.

3 個のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \in V$ について, どのベクトルも他の 2 個のベクトルの 1 次結合で書き表せないと言うことは,

$$\boldsymbol{u}_1 = p_2\boldsymbol{u}_2 + p_3\boldsymbol{u}_3 \tag{2.2}$$

をみたす p_2, p_3 が存在しないし,

$$\boldsymbol{u}_2 = q_1\boldsymbol{u}_1 + q_3\boldsymbol{u}_3 \tag{2.3}$$

をみたす q_1, q_3 や,

$$\boldsymbol{u}_3 = r_1\boldsymbol{u}_1 + r_2\boldsymbol{u}_2 \tag{2.4}$$

をみたす r_1, r_2 が存在しないということである. これら 3 つの等式 (2.2), (2.3), (2.4) はそれぞれ, 3 つの方程式

$$\begin{array}{rcrcrcl} \boldsymbol{u}_1 & + & (-p_2)\boldsymbol{u}_2 & + & (-p_3)\boldsymbol{u}_3 & = & \mathbf{0}_V, \\ (-q_1)\boldsymbol{u}_1 & + & \boldsymbol{u}_2 & + & (-q_3)\boldsymbol{u}_3 & = & \mathbf{0}_V, \\ (-r_1)\boldsymbol{u}_1 & + & (-r_2)\boldsymbol{u}_2 & + & \boldsymbol{u}_3 & = & \mathbf{0}_V \end{array}$$

に変形出来るので, 1 つの方程式

$$x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + x_3\boldsymbol{u}_3 = \mathbf{0}_V \tag{2.5}$$

にまとめて考える. なお, 方程式 (2.5) にはいつでも自明な解 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ が存在する.

自明な解以外の解 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, x_3 = c_3$ が存在するとき, $c_1 \neq 0$ または $c_2 \neq 0$ または $c_3 \neq 0$ でなければならない. $c_1 \neq 0$ のとき,

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{c_2}{c_1}, \quad x_3 = \frac{c_3}{c_1}$$

は (2.5) の解となり,

$$p_2 = -\frac{c_2}{c_1}, \qquad p_3 = -\frac{c_3}{c_1}$$

が, (2.3) をみたす. つまり, $\boldsymbol{u}_1$ は $\boldsymbol{u}_2$ と $\boldsymbol{u}_3$ の 1 次結合で書き表せることになる. もし, $c_1 = 0$ であっても $c_2 \neq 0$ または $c_3 \neq 0$ なので, 同様にして $\boldsymbol{u}_2$ または $\boldsymbol{u}_3$ が他のベクトルの 1 次結合で書き表されることになる. よって $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ は 1 次独立でない.

一方, 方程式 (2.5) に自明な解 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ しか存在しないのであれば, どのベクトルも, 他の 2 個のベクトルの 1 次結合で書き表せない.(書き表せたとすると, 自明でない解が存在することになってしまうから.) したがって, このとき $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ は 1 次独立である.

以上のアイデアは, 一般の n 個のベクトルについても適用できる. そこで, ベクトル空間のベクトルが 1 次独立とは次のように定義する.

定義 2.5 (ベクトルの 1 次独立)**.** ベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ についての 1 次関係

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \mathbf{0}_V \tag{$*$}$$

をみたす $c_1, c_2, \cdots, c_n \in \boldsymbol{R}$ が自明な $c_1 = 0, c_2 = 0, \cdots, c_n = 0$ に限る[*9]とき, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ は ($\boldsymbol{R}$ 上)**1 次独立**という. また, 1 次独立でないとき, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ は ($\boldsymbol{R}$ 上)**1 次従属**という.

注意 2.6. $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ の中に 1 個でも零ベクトル $\mathbf{0}$ が存在すれば, $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ は 1 次従属になる.

注意 2.7. $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ が 1 次独立であれば, その中から 1 つのベクトルを取り除いた $(n-1)$ 個のベクトルも 1 次独立である.

[*9] $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ のときはいつでも ($*$) をみたすので,「限る」という言葉が重要である. また,「$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ に自明な 1 次関係以外の 1 次関係が存在する」と言っても良い.

1 次独立の定義により, 次の命題が成り立つ.

命題 2.8. $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ がベクトル空間 V のベクトルのとき

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \text{ が 1 次従属} \\ &\iff \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \text{ の少なくとも 1 個のベクトルが他の } (n-1) \text{ 個のベクトルの 1 次結合で書き表せる} \end{aligned}$$

が成り立つ.

また, 次の定理が成り立つ.

定理 2.9. $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ をベクトル空間 V の 1 次独立な n 個のベクトルとする. これらに $\boldsymbol{v}(\in V)$ を 1 個加えた $(n+1)$ 個のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}$ を考える. このとき,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v} \text{ が 1 次従属} \\ &\iff \boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n \text{ をみたす } c_1, \cdots, c_n \in \boldsymbol{R} \text{ が存在する} \end{aligned}$$

が成り立つ.

問題 2.5. 定理 2.9 を示せ.

何故, 1 次独立であるかどうかを気に掛ける必要があるのか? その理由の一つを与える定理を紹介しておく. 次の定理は 1 次独立なベクトルの重要な性質の一つである.

定理 2.10. (1 次結合の一意性) 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ の 1 次結合でベクトル $\boldsymbol{v}$ が表されるとき, その表し方は唯一である.

証明. $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ を用いて

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n \quad (c_1, \cdots, c_n \in \boldsymbol{R})$$

と

$$\boldsymbol{v} = c_1'\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n'\boldsymbol{u}_n \quad (c_1', \cdots, c_n' \in \boldsymbol{R})$$

の 2 通りに表せたとする. このとき

$$\begin{aligned} &c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = c_1'\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n'\boldsymbol{u}_n \\ &\iff (c_1 - c_1')\boldsymbol{u}_1 + \cdots + (c_n - c_n')\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0}_V \qquad (*) \end{aligned}$$

であり, $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ は 1 次独立であるので, 1 次関係 $(*)$ をみたすスカラーは自明なもの

$$c_1 - c_1' = 0, \cdots, c_n - c_n' = 0$$

に限り, すなわち

$$\begin{cases} c_1 = c_1' \\ \quad\vdots \\ c_n = c_n' \end{cases}$$

でなければならない □

注意 2.11. この定理により, 定理 2.9 の $c_1, \cdots, c_n$ も唯一通りに定まることが分かる. なお, $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n$ をみたす $c_1, \cdots, c_n \in \boldsymbol{R}$ が唯一通りに定まっても 1 次関係の式 $c_1'\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n'\boldsymbol{u}_n + c_{n+1}'\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ をみたす $c_1', \cdots, c_n', c_{n+1}' \in \boldsymbol{R}$ は 1 通りとは限らない.

以上は一般のベクトルについての性質である. $V = \boldsymbol{R}^m$ については同次形の連立 1 次方程式の議論が使える.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \cdots, \ \boldsymbol{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^m$$

のとき, 同次形の連立 1 次方程式

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}_m \tag{$*$}$$

について考える. 注意 2.4 により, 次の命題を得る.

命題 2.12. $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$ を基本変形して得られる行列が $A' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}'_1 & \boldsymbol{a}'_2 & \cdots & \boldsymbol{a}'_n \end{bmatrix}$ であるならば

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \text{ は 1 次独立} \iff \boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2 \cdots, \boldsymbol{a}'_n \text{ は 1 次独立}$$

が成り立つ.

注意 2.13. 対偶をとれば

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \text{ は 1 次従属} \iff \boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2 \cdots, \boldsymbol{a}'_n \text{ は 1 次従属}$$

も成り立つ.

また, 同次形の連立 1 次方程式の解に関する性質より

命題 2.14. $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n \in \boldsymbol{R}^m$ について $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$ とする. このとき

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \text{ は 1 次独立} \\ &\iff \text{同次形の連立 1 次方程式 } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ の解が自明なものに限る} \\ &(\iff \operatorname{rank}(A) = n) \end{aligned}$$

が成り立つ.

注意 2.15. $(*)$ は同次形の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ と同値であり, その自明な解とは $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}_n$ のことをいう. $\operatorname{rank}(A)$ は行列 A の階数である. 階数は行列の簡約化が一意に定まることが前提となっている値なので, この命題の最後の “ $\iff \operatorname{rank}(A) = n$ ” については, 簡約行列の一意性が示されるまでは正しいとは言えない.

ただ, この命題は以後登場しない.

列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の場合は, そのまま並べると $m \times n$ 行列 A になるが, 一般のベクトルにおいてはそのまま並べても行列にはならない. したがって, 連立 1 次方程式の議論に持ち込むためには上記のように単純ではなく, もう少しアイデアを必要とするのでここでは取り扱わない.

定義 2.16 ($\boldsymbol{R}^m$ **の基本ベクトル**)**.** i 番目の成分が 1 でそれ以外の成分が全て 0 である m 次列ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, \cdots, m)$, つまり

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{e}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^m$$

それぞれを $\boldsymbol{R}^m$ の**基本ベクトル**という.

注意 2.17. $\boldsymbol{R}^m$ の m 個の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m$ は 1 次独立である. また, この m 個から任意の $k(1 \leqq k \leqq m)$ 個の異なるベクトルを選べば, それら k 個の基本ベクトルも 1 次独立である.

3 簡約行列とその性質

簡約化の一意性を述べる前に, 簡約行列とその性質を確認しておく.

行列 A の行で $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ (0 だけからなる行) でない第 k 行について, この行の成分を左から数えて, 最初に 0 でない成分を A の第 k 行の**主成分**という.

定義 3.1. 行列が, 以下の 4 条件 (i), (ii), (iii), (iv) 全てをみたすとき, その行列を**簡約行列**という:

(i) 行列に 0 だけからなる行があれば, それは 0 以外の成分を持つ行よりも下にある.
(ii) 行列の 0 以外の成分を持つ各行の主成分は全て 1 に限る.
(iii) 各行の主成分は, 下の行の方が上の行より右にある.
(iv) 各行の主成分を含む列の主成分以外の上下の他の成分は全て 0 に限る.

注意 3.2. $\boldsymbol{R}^m$ の基本ベクトルの中で, 簡約行列となるのは $\boldsymbol{e}_1$ だけである.

具体例をあげながら, 簡約行列を観察してみよう.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

はいずれも簡約行列であり, 主成分に注目すると条件 (iv) により, その列は全て基本ベクトルであり, 含まれる基本ベクトルの種類の個数[*10] はそれぞれの行列の主成分の個数[*11] である.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

また, (iii) により, 1 つの簡約行列に含まれる基本ベクトルの種類は, A_3 については $\boldsymbol{e}_1$ だけだが, A_1 については左から $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ が含まれ, A_2 については左から $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ が列に含まれる.

命題 3.3. 簡約行列 A について, A の主成分の個数を k としたとき A には, k 個の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_k$ の全てが含まれ, $i < j$ $(i, j \in \{1, 2, \cdots, k\})$ のとき $\boldsymbol{e}_j$ は $\boldsymbol{e}_i$ より右に存在する.

次に簡約行列における零ベクトルの役割を見てみよう.

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \ B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \ B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

はいずれも, 簡約行列である. B_1 は第 1 列が零ベクトルであるが, この第 1 列を取り除いた行列 B_2 は簡約行列である. さらに, 簡約行列 B_2 の第 2 列と第 3 列の間に挿入したものが B_3 であり, 簡約行列である.

[*10] A_1 の第 5 列も基本ベクトルになっているが, これは第 4 列と同じである.
[*11] 簡約行列の一意性が示されたのであれば「階数」と言って良い.

命題 3.4. 簡約行列 A について, A から零ベクトルを取り除いた行列 A', A の任意の列の間に零ベクトルを挿入した行列を A'' とするとき, A' および A'' は簡約行列である.

続いて, 簡約行列の列を右から取り除いていこう.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

は簡約行列である. 最も右の列を取り除いても

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となり, 簡約行列である. 同様にして次々に右端の列を取り除いていくと

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

最後にはたった 1 列の行列になるが, 全て簡約行列である. これは, どの列を取り除いても, 条件 (i) は影響を受けないし, 右端の列を取り除いても, 残った行列で (ii), (iii), (iv) は成立するからである.

命題 3.5. 簡約行列 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{n-1} & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$ から, 最も右の 1 列を取り除いた行列 $A' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{n-1} \end{bmatrix}$ は簡約行列である.

4 簡約行列の一意性

具体的に, その方法をここでは述べないが, 線形代数の教科書あるいは, サブテキスト「0006 行列の簡約化」にあるように, 行列を基本変形して簡約行列にまで変形する方法が存在し, つまり, 次の命題が成り立つ.

命題 4.1. 任意の行列は行列の行基本変形を繰り返し用いることにより, 簡約行列に変形出来る.

行列 A を行列の行基本変形の繰り返しにより簡約行列 B に変形すること, 及び, 行列 B のことを A の**簡約化**という.

注意 4.2. 簡約化は行列の行基本変形のみの変形なので, 行列 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$ の簡約化を $B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$ とすると, 命題 2.3 により

$$\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{0}$$

対偶を考えると

$$\boldsymbol{a}_j \neq \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{b}_j \neq \boldsymbol{0}$$

が成り立つ.

また, 命題 3.4 により, 行列 A の簡約化 B がの一意に定まることを示す場合, A の全ての列は $\boldsymbol{0}$ でないと仮定して良いし, このとき B の全ての列は $\boldsymbol{0}$ でない.

$m \times n$ 行列の簡約化が唯一つに決まることを示すのが本書の目的であった. しかしながら, いきなり一般の n 列の行列 ($m \times n$ 行列) で証明をすると, 難しく感じるかもしれない. そこで, 1 列だけの行列 ($m \times 1$ 行列),

2 列だけの行列 ($m \times 2$ 行列), 3 列の行列 ($m \times 3$ 行列) で簡約化の一意性を示しておく. 2 列だけの行列の簡約化について十分理解できたなら, 一般の n 列の行列でも理解できると思われる.

4.1 $m \times 1$ 行列の簡約化の一意性

たった 1 列の行列 $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^m$ の簡約化 $\boldsymbol{b}$ を考えよう.

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}_m$ なら注意 4.2 により, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}_m$ に限る.

また, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}_m$ ならば, このときも注意 4.2 により, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}_m$ である. ここで $\boldsymbol{0}_m$ でない $m \times 1$ の簡約行列は, 第 1 行が 0 だと簡約行列の条件 (i) に反するので, 第 1 成分は 0 ではない. したがって, 第 1 行の主成分が 1 でなければならず, 条件 (iv) も考慮すれば $\boldsymbol{0}_m$ でない $m \times 1$ の簡約行列は,

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

のみなので $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1$ でなければならない. よって次の補題を得る.

補題 4.3. $m \times 1$ 行列 $\boldsymbol{a}$ の簡約化 $\boldsymbol{b}$ は唯一通りに定まり, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}_m$ のときは $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}_m$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}_m$ のときは $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1$ である.

4.2 $m \times 2$ 行列の簡約化の一意性

次に 2 列からなる行列の簡約化が一意に定まることを言う. 注意 4.2 により, 全ての列は $\boldsymbol{0}$ でないと仮定してよい.

全ての列が $\boldsymbol{0}_m$ でない $m \times 2$ 行列 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix}$ の簡約化を $B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix}$ とする. B が簡約行列であるとき, 命題 3.5 により, $\boldsymbol{b}_1$ も簡約行列である. 仮定より, $\boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{0}_m$ だから $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_1$ に限り, B の第 1 列は唯一通りに定まる. すなわち,

$$B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix}$$

である. 次に, (I) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が 1 次独立, (II) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が 1 次従属, の 2 つに場合分けして考える.

(I) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が 1 次独立のとき, 注意 2.4 により $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ も 1 次独立である. $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_1$ だったので, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{b}_2$ が 1 次独立である. ここで, $\boldsymbol{b}_2 (\neq \boldsymbol{0}_m)$ の 2 行目以降が全て 0, すなわち

$$\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

($*$ は 0 以外の実数) だとすると, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{b}_2$ は 1 次従属になってしまう. したがって, 2 行目以降に 0 以外の成分が必ず存在する. また, $\boldsymbol{b}_2$ の第 2 成分が 0 だとすると, B の第 2 行が $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ となり, 簡約行列の条件 (i) に反する. したがって, $\boldsymbol{b}_2$ の第 2 成分は B の第 2 行の主成分である. よって, B が簡約行列であるためには $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{e}_2$ に限り, A の簡約化は唯一つであり,

$$B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix}$$

である.

(II) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が 1 次従属のとき, 定理 2.9 および 定理 2.10 により, $\boldsymbol{a}_2 = c_1\boldsymbol{a}_1$ をみたす実数 c_1 が唯一つに定まる. また, 注意 2.4 により

$$\boldsymbol{b}_2 = c_1\boldsymbol{b}_1 = c_1\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

でなければならず, このときも A の簡約化は唯一つであり,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & c_1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる.

4.3 $m \times 3$ 行列の簡約化の一意性

3 列からなる行列の簡約化が一意に定まることを言う. 全ての列は $\mathbf{0}$ でないと仮定してよいので, 全ての列が $\mathbf{0}_m$ でない $m \times 3$ 行列 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix}$ の簡約化を $B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 \end{bmatrix}$ とする. B の第 3 列を取り除いた行列 $B_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix}$ は簡約行列であり, B_2 は $A_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix}$ から唯一通りに定まったので, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ から $\boldsymbol{b}_3$ が唯一通りに定まることを確かめれば良い.

B_2 は唯一通りに定まり, 主成分の個数も $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ から唯一つに定まる. (I) $B_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix}$, または (II) $B_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & * \end{bmatrix}$ (ここで, $*$ は適当な列ベクトル), のどちらかに限る.

(I) $B_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix}$ のとき, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は 1 次独立である. このことに注意して, さらに, (I–I) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が 1 次独立, (I–II) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が 1 次従属, の 2 つに場合分けして考える.

(I–I) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が 1 次独立のとき, $\boldsymbol{b}_3$ の第 3 成分以降が全て 0 だと, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が 1 次従属になってしまい, さらに $\boldsymbol{b}_3$ の第 3 成分が 0 だと, B は簡約行列にならない. このことから $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{e}_3$ に限り, A の簡約化は唯一つであり,

$$B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix}$$

である.

(I–II) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が 1 次従属のとき, 定理 2.9 および 定理 2.10 により

$$\boldsymbol{a}_3 = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2$$

をみたす実数 c_1, c_2 が唯一通りに定まる. また, 注意 2.4 により

$$\boldsymbol{b}_3 = c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

でなければならず, このときも A の簡約化は唯一つであり,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる.

(II) $B_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & * \end{bmatrix}$ のとき, ここで B_2 の第 2 列は

$$* = \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

であることと, $\boldsymbol{a}_1$ だけなら 1 次独立であることに注意して, (I) と同様に, さらに, (II–I) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3$ が 1 次独立, (II–II) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3$ が 1 次従属, の 2 つに場合分けして考える.

(II–I) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3$ が 1 次独立のとき, $\boldsymbol{b}_3$ の第 2 成分以降が全て 0 だと, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3$ が 1 次従属になってしまい, さらに $\boldsymbol{b}_3$ の第 2 成分が 0 だと, B は簡約行列にならない. このことから $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{e}_2$ に限り, A の簡約化は唯一つであり,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる.

(II–II) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3$ が 1 次従属のとき, 定理 2.9 および 定理 2.10 により

$$\boldsymbol{a}_3 = c_1 \boldsymbol{a}_1$$

をみたす実数 c_1 が唯一つ定まる. また, 注意 2.4 により

$$\boldsymbol{b}_3 = c_1 \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

でなければならず, このときも A の簡約化は唯一つであり,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & * & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる.

以上により, $m \times 3$ 行列の簡約化も一意に定まることが言えた.

同様の議論は一般の n 列の行列でも言える.

4.4 一般の行列の簡約化の一意性

$m \times \ell$ 行列の簡約化が唯一つに定まるならば, 次の補題が成り立つ.

補題 4.4. $m \times \ell$ 行列 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_\ell \end{bmatrix}$ の簡約化が唯一つに定まるとする. $k = \mathrm{rank}(A)$ としたとき, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_\ell$ の中から, 1 次独立な k 個のベクトル $\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \cdots, \boldsymbol{d}_k$ を選び出すことが出来て, $m \times d$ 行列 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_1 & \boldsymbol{d}_2 & \cdots & \boldsymbol{d}_k \end{bmatrix}$ の簡約化は $\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_k \end{bmatrix}$ である.

証明. $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_\ell \end{bmatrix}$ の簡約化が $B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_\ell \end{bmatrix}$ であるとき, 仮定より $k = \mathrm{rank}(A)$ であるので, B の列の中に $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_k$ と一致する列が存在する. これらに対応する A の列を選ぶ, すなわち $j = 1, \cdots, k$ について $\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{e}_j$ をみたす $\boldsymbol{b}_i$ が必ず存在するので, そのとき $\boldsymbol{d}_j = \boldsymbol{a}_i$ と決める. このとき $k \leqq \ell$ であるので, $m \times k$ 行列 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_1 & \boldsymbol{d}_2 & \cdots & \boldsymbol{d}_k \end{bmatrix}$ を簡約化すると必ず $\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_k \end{bmatrix}$ となり, $\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \cdots, \boldsymbol{d}_k$ は 1 次独立となる. □

例 全ての列が $\boldsymbol{0}_m$ でない行列 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix}$ の簡約化 B は

$$(1) \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix}, \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4) \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

のいずれかに唯一つ定まる. (1) のときは $\boldsymbol{d}_1 = \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{d}_2 = \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{d}_3 = \boldsymbol{a}_3$, (2) のときは $\boldsymbol{d}_1 = \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{d}_2 = \boldsymbol{a}_2$, (3) のときは $\boldsymbol{d}_1 = \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{d}_2 = \boldsymbol{a}_3$, (4) のときは $\boldsymbol{d}_1 = \boldsymbol{a}_1$ とすれば良い.

定理 4.5 (簡約行列の一意性)**.** 行列 A の簡約化 B は唯一通りに定まる.

証明. 注意 4.2 により, 全ての列は $\boldsymbol{0}$ でないと仮定してよい.

全ての列が $\boldsymbol{0}_m$ でない $m \times n$ 行列 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$ の簡約化を $B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$ とし, B が唯一通りに定まることを示す.

そのために, B から定まる n 個の行列

$$B_1 = \boldsymbol{b}_1,\ B_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix},\ \cdots,\ B_{n-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_{n-1} \end{bmatrix},\ B_n = B$$

を用意する. 特に B は簡約行列なので, 命題 3.5 より

$$B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_{n-1}$$

も全て簡約行列であり,

$$B_{\ell+1} = \begin{bmatrix} B_\ell & \boldsymbol{b}_{\ell+1} \end{bmatrix}$$

である.

$i = 1, 2, \cdots, n$ について「A から B_i が唯一通りに定まる」($\star$) が成り立つことを示す.

(I) $i = 1$ のとき B_1 は簡約行列であり, 仮定より, $B_1 \neq \boldsymbol{0}_m$ である. したがって, 補題 4.3 により B_1 は唯一通り,

$$B_1 = \boldsymbol{e}_1$$

に定まる. よって $i = 1$ のときは ($\star$) が成り立つ.

(II) 次に $i = \ell$ $(1 \leqq \ell < n)$ のとき, ($\star$) が成り立つと仮定する. このとき, 補題 4.4 により, 簡約行列 B_ℓ の主成分の個数が k であるなら $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_\ell$ の中から, 1 次独立な k 個のベクトル $\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \cdots, \boldsymbol{d}_k$ を選び出すことが出来る.

次に $i = \ell + 1$ のとき, $\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \cdots, \boldsymbol{d}_k, \boldsymbol{a}_{\ell+1} \in \boldsymbol{R}^m$ が 1 次独立かどうかで場合分けをして考える.

(1) $\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \cdots, \boldsymbol{d}_k, \boldsymbol{a}_{\ell+1}$ が 1 次独立の時, 注意 2.4 により $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{b}_{\ell+1}$ も 1 次独立である. また, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_k$ は $B_{\ell+1}$ の第 $(\ell+1)$ 列以外の列として存在する. また $\boldsymbol{b}_{\ell+1} = \boldsymbol{e}_{k+1}$ である. (何故なら, $\boldsymbol{b}_{\ell+1} (\neq \boldsymbol{0}_m)$ の第 $(k+1)$ 成分以降が全て 0 だとすると, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{b}_{\ell+1}$ は 1 次従属になってしまうので, 第 $(k+1)$ 成分以降に 0 以外の成分が必ず存在する. また, $\boldsymbol{b}_{\ell+1}$ の第 $(k+1)$ 成分が 0 だとすると, $B_{\ell+1}$

の第 $(k+1)$ 行が $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ となり, 簡約行列の条件 (i) に反し, $B_{\ell+1}$ が簡約行列でなくなってしまうので, 簡約行列 $B_{\ell+1}$ の第 $(k+1)$ 行の主成分が $\boldsymbol{b}_{\ell+1}$ の第 $(k+1)$ 成分でなければならないから.) よって,

$$B_{\ell+1} = \begin{bmatrix} B_\ell & \boldsymbol{e}_{k+1} \end{bmatrix}$$

と唯一通りに定まる.

(2) $\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \cdots, \boldsymbol{d}_k, \boldsymbol{a}_{\ell+1}$ が 1 次従属のとき, 定理 2.9 および 定理 2.10 により,

$$\boldsymbol{a}_{\ell+1} = c_1\boldsymbol{d}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{d}_k$$

をみたす実数 $c_1, \cdots, c_k$ が唯一通りに定まる. また, 注意 2.4 により

$$\boldsymbol{b}_{\ell+1} = c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{e}_k = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

でなければならず, このときも

$$B_{\ell+1} = \left[\begin{array}{c:c} & c_1 \\ & \vdots \\ B_\ell & c_k \\ & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \end{array}\right]$$

と唯一通りに定まる. よって (1), (2) により $i = \ell + 1$ のときも $(\star)$ は成立する.

以上 (I), (II) により $i = 1, 2, \cdot, n$ について $(\star)$ が成立し, 特に $B(= B_n)$ も A から唯一通りに定まる □

参考書籍

本文に登場する語句や記号は次の書籍を参考に執筆した.

三宅敏恒 『入門線形代数』 (倍風館)

問題の略解

問題 2.4 $\boldsymbol{u} = e^u, \boldsymbol{v} = e^v \in V$, $c \in \boldsymbol{R}$ に対して (和) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = e^u \cdot e^v = e^{u+v}$, (スカラー倍) $c\boldsymbol{u} = (e^u)^c = e^{cu}$ とすれば良い. また $\boldsymbol{0} = e^0 = 1$ である.

問題 2.5 ($\Longrightarrow$) $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}$ の 1 次関係

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n + c_{n+1}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \tag{$*$}$$

について, 仮定により $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}$ が 1 次従属 のときは, 自明でない $c_1, \cdots, c_n, c_{n+1} \in \boldsymbol{R}$ が存在する. ここで, $c_{n+1} = 0$ だと, $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ が 1 次従属になってしまうので $c_{n+1} \neq 0$ に限る. したがって $(*)$ により

$$\boldsymbol{v} = \left(-\frac{c_1}{c_{n+1}}\right)\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \left(-\frac{c_n}{c_{n+1}}\right)\boldsymbol{u}_n$$

となる. ($\Longleftarrow$) 命題 2.8 より.