

合成関数の微分法

立命館大学理工学部数学学修相談会

2018年10月25日*

概要

関数の微分において、その関数を合成関数と見なすことにより、計算が単純になることがある。合成関数そのものは高校の数学においても登場し、一通り学んできた。合成関数の微分法についても高校の数学で登場し、物理学などの計算でも頻繁に登場する。証明も高校の数学の教科書で紹介されているが、残念ながら不備があり、正しくない。合成関数は極限においても、細かな考察を必要とし、直感に従うと間違えることが多い。合成関数の復習から、その微分法までを具体例を挙げながら解説する。

目次

1	はじめに	1
2	合成関数の定義域	2
3	合成関数の極限	3
4	合成関数の連続性	5
5	合成関数の微分法	6
6	練習問題	9

1 はじめに

$(x^2 + 3x + 1)^7$ の導関数を求める際、そのまま、展開して

$$\begin{aligned}\{(x^2 + 3x + 1)^7\}' &= (x^{14} + 21x^{13} + 196x^{12} + 1071x^{11} + 3801x^{10} + 9198x^9 + 15533x^8 \\ &\quad + 18483x^7 + 15533x^6 + 9198x^5 + 3801x^4 + 1071x^3 + 196x^2 + 21x + 1)' \\ &= 14x^{13} + 273x^{12} + 2352x^{11} + 11781x^{10} + 38010x^9 + 82782x^8 \\ &\quad + 124264x^7 + 129381x^6 + 93198x^5 + 45990x^4 + 15204x^3 + 3213x^2 + 392x + 21\end{aligned}$$

と求めるより、

$$\begin{aligned}\{(x^2 + 3x + 1)^7\}' &= 7(x^2 + 3x + 1)^6 \cdot (x^2 + 3x + 1)' \\ &= 7(2x + 3)(x^2 + 3x + 1)^6\end{aligned}$$

* 執筆 平岡由夫

とした方が計算が容易であるし、多くのものがそうするであろう。だが、この計算に用いている「合成関数の微分法」に気付いていない者も多い。

(複雑な式)⁷ を微分するより、 t^7 を微分する方が楽である。そこで、今 $f(t) = t^7$ とおいて単純に $f'(t)$ を求めてから $t = x^2 + 3x + 1$ により、変数を元の x に戻してみよう。

$$\begin{aligned} (t^7)' &= 7t^6 \\ &= 7(x^2 + 3x + 1)^6 \\ &= 7x^{12} + 126x^{11} + 987x^{10} + 4410x^9 + 12390x^8 + 22806x^7 \\ &\quad + 27923x^6 + 22806x^5 + 12390x^4 + 4410x^3 + 987x^2 + 126x + 7 \end{aligned}$$

ここで求めた $7(x^2 + 3x + 1)^6$ は $f'(t) = 7t^6$ を用いて表すことができる。

$$f'(x^2 + 3x + 1) = 7(x^2 + 3x + 1)^6$$

である。つまり、 $g(x) = x^2 + 3x + 1$ とおくと

$$f' \circ g(x) = f'(g(x)) = f'(x^2 + 3x + 1) = 7(x^2 + 3x + 1)^6$$

である。もちろん、

$$\{(x^2 + 3x + 1)^7\}' \neq f'(g(x))$$

であるが、実は、 $g'(x) = 2x + 1$ であり、

$$\{(x^2 + 3x + 1)^7\}' = f'(g(x))g'(x)$$

となっている。これが、「合成関数の微分法」と呼ばれるものである。すなわち、

$$f(t) = t^7, \quad g(x) = x^2 + 3x + 1$$

とおくと、

$$(x^2 + 3x + 1)^7 = f(g(x)) (= f \circ g(x))$$

であり、

$$\begin{aligned} \{(x^2 + 3x + 1)^7\}' &= f(g(x))' (= \{f \circ g(x)\}') \\ &= f'(g(x))g'(x) \\ &= 7(x^2 + 3x + 1)^6 \cdot (x^2 + 3x + 1)' \\ &= 7(2x + 3)(x^2 + 3x + 1)^6 \end{aligned}$$

と計算していることになる。

2 合成関数の定義域

実数全体の集合を \mathbb{R} と記す。本書で登場する関数の値域と定義域は全て \mathbb{R} の空でない部分集合とする。特に、関数 f の定義域を $D(f)$ と記述する。 $y = f(t)$, $t = g(x)$ のとき、 $f(g(x))$ を、 f と g の合成関数と言って、 $f \circ g(x)$ と記す。ただし、この記号は紛らわしいので、合成関数を直接 $f(g(x))$ と記述することの方が多い*1。しかしながら、合成関数 $f(g(x))$ の定義域は $D(f \circ g)$ と記す。

*1 高校と違い、 $f \circ g(x) = g(f(x))$ と定義する流儀もあるので、“ $f \circ g$ ” は紛らわしい。

例えば, $f(t) = \sqrt{t}$, $g(x) = 2 - x$ のときを考えよう. このとき, $g(x)$ の定義域 $D(g)$ は $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ であるが, 合成関数 $f(g(x))$ の定義域 $D(f \circ g)$ は $(-\infty, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$ である. これは $f(t)$ の定義域 $D(f)$ が $[0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$ であるので, $t = g(x) = 2 - x \geq 0$ をみたす x でなければならないからである. 定義域がどうなっているのかで, 議論が微妙になってくるので, 注意するように心掛けてもらいたい.

$g(x)$, $f(t)$ について, g の定義域に含まれる \mathbb{R} の部分集合 $I (\neq \emptyset)$, f の定義域に含まれる \mathbb{R} の部分集合 $J (\neq \emptyset)$, (つまり

$$I \subset D(g), \quad J \subset D(f)$$

である.) が $g(I) \subset J$ をみたすならば, f と g の合成関数 $f(g(x)) (= f \circ g(x))$ は I で定義される関数, すなわち $I \subset D(f \circ g)$ である. ここで

$$g(I) = \{g(x) \mid x \in I\}$$

である.

関数について考えるとき, 定義域を常に気にすることが重要であるが, 事細かに記述していると本質が見えなくなる恐れもあるので, 特に記述が無い場合は, 次の 2 条件をみたす \mathbb{R} の部分集合 $I (\neq \emptyset)$ の内で定義される $g(x)$, $f(g(x))$ を考えているものとする*2:

- (1) g は I で定義される. ($I \subset D(g)$)
- (2) $g(I) \subset D(f)$ をみたす.

3 合成関数の極限

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = t_0$ かつ $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \alpha$ であるとき, $x \rightarrow a$ のとき $t = g(x) \rightarrow t_0$ であり $t \rightarrow t_0$ のとき $f(g(x)) = f(t) \rightarrow \alpha$ *3 だから $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \alpha$ が成り立ちそうな気がする. しかし, それは間違いである.

関数 $f(t)$ において t が t_0 と異なる値をとりながら, t_0 に限りなく近づくと, $f(t)$ の値が近づき方によらない α に限りなく近づくと, すなわち, 任意の正の実数 ε について

$$0 < |t - t_0| < \delta, t \in D(f) \implies |f(t) - \alpha| < \varepsilon$$

をみたす正の実数 δ が存在するとき, $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \alpha$ と表した. したがって, $x \rightarrow a$ のとき $g(x) \neq t_0$ をみたしながら $g(x) \rightarrow t_0$ となる関数を $g(x)$ とするならば $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = t_0$ かつ $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \alpha$ のとき $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \alpha$ が成り立つ. 例えば,

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}, \quad f(t) = \begin{cases} 1 & (t \neq 0) \\ 0 & (t = 0) \end{cases}$$

のとき,

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 1$$

であり, $f(g(x)) = 1$ だから

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = 1 = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$$

が成り立つ.

一般には次の命題が成り立つ.

*2 「合成関数が意味を持つ」と言うこともある.

*3 ここが間違い.

命題 3.1. $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \alpha$ のとき, a の十分近くで定義される関数 $g(x)$ が

$$a \text{ の十分近くでは } g(x) \neq t_0 \quad (\dagger)$$

をみたすならば

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = t_0$$

となるとき,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \alpha = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \quad (*)$$

が成り立つ.

証明. (ε - δ 論法を用いないと証明が難しい.) 任意の $\varepsilon (> 0) \in \mathbb{R}$ について, $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \alpha$ より,

$$0 < |t - t_0| < \delta_0 \implies |f(t) - \alpha| < \varepsilon \quad (3.1)$$

をみたす正の実数 δ_0 が存在する. また, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = t_0$ より, $\delta_0 (> 0)$ に対して

$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies |g(x) - t_0| < \delta_0$$

をみたす δ_1 が存在する. さらに, a の十分近くでは $g(x) \neq t_0$ であるので

$$0 < |x - a| < \delta'_1 \implies 0 < |g(x) - t_0|$$

をみたす δ'_1 が存在するので, $\delta = \min(\delta_1, \delta'_1)$ とすると

$$0 < |x - a| < \delta \implies 0 < |g(x) - t_0| < \delta_0 \quad (3.2)$$

が成り立つ. よって, (3.1), (3.2) により, このとき

$$0 < |x - a| < \delta \implies 0 < |g(x) - t_0| < \delta_0 \implies |f(g(x)) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ □

ところが, この命題の条件 (\dagger) をみたさない関数 $g(x)$ については, 連続関数であっても (*) が成り立たないことがある. 例えば,

$$g(x) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} 1 & (t \neq 0) \\ 2 & (t = 0) \end{cases}$$

のとき,

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 1$$

であるが, $f(g(x)) = 2$ であるので,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = 2 \neq 1 = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$$

となる.

この例のように, $x \neq a$ で x が a に十分近いところで常に $g(x) = t_0$ であるとき, この x において $f(g(x)) = f(t_0)$ となり $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(t_0)$ となる. このとき, $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \neq f(t_0)$ すなわち, $f(t)$ が t_0 で不連続であったならば, $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) \neq \lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$ となってしまう. しかし, $f(t)$ が $t = t_0$ で連続であるならば, $g(x)$ に命題 3.1 の条件 (\dagger) は不要で, 次の命題が成り立つ.

命題 3.2. $f(t)$ が t_0 で連続である*4とき, a の十分近くで定義される関数 $g(x)$ が

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = t_0$$

となるとき

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$$

が成り立つ.

証明. (ε - δ 論法を用いないと証明は難しい.) 任意の $\varepsilon (> 0) \in \mathbb{R}$ について, $f(t)$ が t_0 で連続なので,

$$|t - t_0| < \delta_0 \implies |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon \quad (3.3)$$

をみたす正の実数 δ_0 が存在する. また, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = t_0$ だから, この $\delta_0 (> 0)$ について,

$$0 < |x - a| < \delta \implies |g(x) - t_0| < \delta_0 \quad (3.4)$$

をみたす δ が存在する. このとき (3.3), (3.4) より

$$0 < |x - a| < \delta \implies |g(x) - t_0| < \delta_0 \implies |f(g(x)) - f(t_0)| < \varepsilon$$

が成り立つ □

4 合成関数の連続性

実数 a で微分可能な関数は, 実数 a で連続であった. すなわち, a で不連続な関数は a で微分不可能である. 合成関数 $f(g(x))$ の微分法を考える上で, 合成関数 $f(g(x))$ が不連続な場合は都合が悪い. 今,

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}, \quad f(t) = \begin{cases} 1 & (t \neq 0) \\ 0 & (t = 0) \end{cases}$$

とする. このとき, $g(x)$ も $f(t)$ も 0 で不連続であるが, その合成関数 $f(g(x)) = 1$ は全ての実数で連続となる. しかも, $f(g(x))$ は全ての実数で微分可能である. このように, $g(x)$ や $f(t)$ が不連続であっても, 合成関数が連続になり, しかも微分可能となることはしばしば起こる. しかしながら, $f(g(x))$ が微分可能だが, $g(x)$ や $f(t)$ が微分不可能であるときは合成関数の微分法

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

において, 右辺が意味を持たなくなるので, 連続だからと言って, 微分可能とは限らないが, せめて $f(t)$, $g(x)$, $f(g(x))$ 全てが連続である場合を先に考えておく.

実は $t = g(x)$ が a で連続のとき, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ であり, さらに $t_0 = g(a)$ において $f(t)$ が連続であれば, $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$ である. したがって, 命題 3.2 により, $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(t_0) = f(g(a))$ となつて, 合成関数 $f(g(x))$ は a で連続となる. *5

*4 したがって $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$ である.

*5 つまり, $t = g(x)$ が a で連続なので

$$x \rightarrow a \text{ のとき } t = g(x) \rightarrow t_0 = g(a)$$

さらに, $f(t)$ が t_0 で連続なので

$$t \rightarrow t_0 \text{ のとき } f(t) \rightarrow f(t_0)$$

したがって, $x \rightarrow a$ のとき $t \rightarrow t_0$ であり,

$$f(g(x)) = f(t) \rightarrow f(t_0) = f(g(a))$$

となるのだが, ε - δ 論法を用いないと, 非常にややこしい.

命題 4.1. $t = g(x)$ が a で連続であり, $f(t)$ が $t_0 = g(a)$ で連続であるならば, その合成関数 $f(g(x)) (= f \circ g(x))$ も a で連続である.

証明. (念のため, ε - δ 論法でも示しておく.) 任意の $\varepsilon (> 0) \in \mathbb{R}$ について $f(t)$ が $t_0 = g(a)$ で連続であるので

$$|t - t_0| < \delta_0 \implies |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon \quad (4.1)$$

をみたく δ_0 が存在する. また $g(x)$ が a で連続だから, この $\delta_0 (> 0)$ について,

$$|x - a| < \delta \implies |g(x) - g(a)| < \delta_0 \quad (4.2)$$

をみたく δ が存在する. このとき (4.1), (4.2) より

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta &\implies |t - t_0| = |g(x) - g(a)| < \delta_0 \\ &\implies |f(g(x)) - f(g(a))| = |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ □

5 合成関数の微分法

合成関数の微分法は高校の数学でも証明と共に習う高校の数学の教科書では変数 u を用いているが, そこを t に変更すれば, 我々が求めたい公式と同じ結果である. 以下引用しておく.

関数 $y = f(u)$ と関数 $u = g(x)$ がともに微分可能ならば, 合成関数 $y = f(g(x))$ も微分可能であり, 次の公式が成り立つ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad (\text{合成関数の微分法})$$

証明 x の増分 Δx に対する $u = g(x)$ の増分を Δu とし, u の増分 Δu に対する $y = f(u)$ の増分を Δy とする. このとき

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (*_1)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (*_2)$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

ここで, $g(x)$ の連続性より

$$\Delta x \rightarrow 0 \text{ のとき} \quad \Delta u = g(x + \Delta x) - g(x) \rightarrow 0$$

であるから

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ゆえに

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

この証明には不備があることで有名である. $\Delta x \neq 0$ のとき, $\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x) \neq 0$ とは限らない (例えば $g(x) = (\text{定数})$ のときなど) ので, $(*_1)$ から $(*_2)$ の変形がおかしい.

$t = g(x)$ が a を含む区間 $I(\subset D(g))$ で微分可能で, $y = f(t)$ が $f(I)$ を含む区間 $J(\subset D(f))$ で微分可能なときを考える.

$t_0 = g(a)$ とおく. x が a から $a + \Delta x$ に増加したときの $t = g(x)$ の増加量を Δt とし, t が t_0 から $t_0 + \Delta t$ に増加したときの $y = f(t)$ の増加量を Δy とする. $\Delta x \neq 0$ のとき, $\Delta t \neq 0$ ならば

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

は正しい. 先に述べたように, $\Delta t = 0$ のときは正しくないので工夫する.

結果的に, $\Delta t \rightarrow 0$ のとき $\Delta y/\Delta t$ の部分が $f'(t_0)$ に収束すれば良いので, $\Delta t \neq 0$ のときは $\Delta y/\Delta t$, $\Delta t = 0$ のときは $f'(t_0)$ となる関数 $h(\Delta t)$, すなわち

$$h(\Delta t) = \begin{cases} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} & (\Delta t \neq 0) \\ f'(t_0) & (\Delta t = 0) \end{cases}$$

を定義する. このとき, 上手い具合に

$$\Delta y = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0) = h(\Delta t) \cdot \Delta t$$

が成り立ち, $\Delta x \neq 0$ のとき

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = h(\Delta t) \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

が成り立つ. つまり,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} & (\Delta t \neq 0) \\ f'(t_0) \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} & (\Delta t = 0) \end{cases}$$

となり, 上手く行く.

以上のことを確認の上, 次の定理を示そう.

定理 5.1. $t = g(x)$, $f(t)$ について, 開区間 $I(\subset D(g))$, 区間 $J(\subset D(f))$ が

$$g(I) \subset J$$

をみたし,

$$\begin{cases} t = g(x) \text{ が } I \text{ で微分可能} \\ y = f(t) \text{ が } J \text{ で微分可能} \end{cases}$$

とする. このとき, 合成関数 $f(g(x))$ は I で微分可能であり, $a \in I$ における $f(g(x))$ の微分係数 $f'(g(a)) (= (f \circ g)'(a))$ は

$$g'(f(a))f'(a)$$

で与えられる.

証明. $F(x) = f(g(x))$ とおいて, $\forall a \in I$ について $F(x)$ が微分可能で, $F'(a) = f'(g(a))g'(a)$ となることを示す.

$\forall a \in I$ について, $t_0 = g(a)$ とおく. このとき $t_0 \in J$ であり, $f(t)$ は $t = t_0$ で微分可能である. したがって, $f'(t_0) (= f'(g(a)))$ が存在する.

今, 原点を含む原点の十分近くで定義される関数 $h(\Delta t)$ を

$$h(\Delta t) = \begin{cases} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} & (\Delta t \neq 0) \\ f'(t_0) & (\Delta t = 0) \end{cases}$$

と定義する. このとき, $h(\Delta t)$ は原点の十分近くで連続な関数であり,

$$f(t_0 + \Delta t) - f(t_0) = h(\Delta t) \cdot \Delta t \quad (*)$$

をみます.

$y = F(x)$ において, Δx が 0 に十分近くて $\Delta x \neq 0$ のとき, x が a から $a + \Delta x$ に変化するときの y の変化量を Δy とし^{*6}, $t = g(x)$ の増加量を Δt とする. (*) において, $\Delta t = g(a + \Delta x) - g(a)$, $t_0 = g(a)$ のとき

$$f(g(a + \Delta x)) - f(g(a)) = h(g(a + \Delta x) - g(a)) \cdot (g(a + \Delta x) - g(a))$$

であるので

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{F(a + \Delta x) - F(a)}{\Delta x} = \frac{f(g(a + \Delta x)) - f(g(a))}{\Delta x} \\ &= h(g(a + \Delta x) - g(a)) \cdot \frac{g(a + \Delta x) - g(a)}{\Delta x} \end{aligned}$$

ここで $G(\Delta x) = g(a + \Delta x) - g(a)$ とおく. $g(x)$ は $x = a$ で連続だから, $G(\Delta x)$ は $\Delta x = 0$ で連続であり, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} G(\Delta x) = G(0) = 0$ である. また, $h(\Delta t)$ も $\Delta t = 0 = G(0)$ で連続なので, その合成関数 $h(G(\Delta x)) = h(g(a + \Delta x) - g(a))$ も $\Delta x = 0$ で連続である. したがって

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} h(g(a + \Delta x) - g(a)) = h(G(0)) = f'(t_0) = f'(g(a))$$

である. また, $g(x)$ は $x = a$ で微分可能なので

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(a + \Delta x) - g(a)}{\Delta x} = g'(a)$$

したがって

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(g(a))g'(a)$$

すなわち, $F(x) = f(g(x))$ は $x = a$ で微分可能であり, $x = a$ における微分係数は

$$F'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

である □

系 5.2. $t = g(x)$ が開区間 I で微分可能で, $g(I) \subset J$ を満たす区間 J において $f(t)$ が微分可能ならば, 区間 I において

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x) \quad (5.1)$$

が成り立つ. これは $y = f(g(x)) = f \circ g(x)$ において

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \quad (5.2)$$

や

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g' \quad (5.3)$$

が成り立つと表現されることもある.

^{*6} I が開区間なので, Δx が原点に十分近ければ, すなわち $|\Delta x|$ が十分小さければ $a + \Delta x \in I$ をみます.

注意 5.3. 式 (5.3) を関数の積の微分公式

$$(fg)' = f'g + fg'$$

と混同してはならない. また, 式 (5.2) の右辺の $\frac{dy}{dt}$ とは $f'(g(x))$ のことである. 例えば, $f(t) = t^7$, $g(x) = x^2 + 3x + 1$ のとき, $f'(t) = 7t^6$ で, $f'(g(x)) = f'(x^2 + 3x + 1) = 7(x^2 + 3x + 1)^6$ だから

$$\frac{dy}{dt} = 7(x^2 + 3x + 1)^6$$

である.

例題 5.4. $y = (x^4 + 2x^2 + 3)^{\sqrt{2}}$ を微分せよ.

(考え方) 式を展開しようにも出来ない. $t = x^4 + 2x^2 + 3$ とおけば $y = t^{\sqrt{2}}$ であり, $t^{\sqrt{2}}$ なら微分できそうである. $y = f(g(x))$ となるように, $f(t)$ や $g(x)$ を決める. このとき $f'(t)$ や $g'(x)$ が求めやすいように選ぶ. そのヒントは「 $t = x^4 + 2x^2 + 3$ だったら良いのに…」と想像することにある.

(解答) $f(t) = t^{\sqrt{2}}$, $g(x) = x^4 + 2x^2 + 3$ とおくと

$$f(g(x)) = f(x^4 + 2x^2 + 3) = (x^4 + 2x^2 + 3)^{\sqrt{2}}$$

である.

$$f'(t) = \sqrt{2} t^{\sqrt{2}-1}, \quad g'(x) = 4x^3 + 4x$$

であるので

$$f'(g(x)) = f'(x^4 + 2x^2 + 3) = \sqrt{2} (x^4 + 2x^2 + 3)^{\sqrt{2}-1}$$

したがって

$$y' = \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x) = \sqrt{2} (x^4 + 2x^2 + 3)^{\sqrt{2}-1} (4x^3 + 4x)$$

を得る.

6 練習問題

問題 1. 次の関数を与えられた $f(t)$ を用いて合成関数 $f(g(x))$ で表したい. それぞれの $g(x)$ を答えよ.

$$(1) (x^2 + 3x + 5)^{10}, \quad f(t) = t^5 \quad (2) \frac{1}{(x^2 + 3x + 5)^{10}}, \quad f(t) = t^{-10}$$

$$(3) \cos(x^2), \quad f(t) = \cos t \quad (4) \sin^5 x, \quad f(t) = t^5$$

$$(5) \cos x, \quad f(t) = \sin x \quad (6) \log|x+1|, \quad f(t) = \log t$$

$$(7) \log|x+1|, \quad f(t) = \log|t| \quad (8) e^{3x}, \quad f(t) = e^t$$

$$(9) (e^{x^2})^3, \quad f(t) = t^3 \quad (10) (e^{x^2})^3, \quad f(t) = e^t$$

$$(11) \sin^{-1}(x^2), \quad f(t) = \sin^{-1} t \quad (12) \tan^{-1} \frac{x}{2}, \quad f(t) = \tan^{-1} t$$

$$(13) (\cos^3 x - \sin^2 x + 3 \sin x)^8, \quad f(t) = t^8$$

問題 2. 次の関数を合成関数の微分法を用いて微分せよ.

- (1) $(x^2 + 3x + 5)^{10}$ (2) $\frac{1}{(x^2 + 3x + 5)^{10}}$ (3) $\cos(x^2)$
 (4) $\sin^5 x$ (5) $\sin^5(x^2)$ (6) $\log|x + 1|$
 (7) $\log\left|\frac{2}{x}\right|$ (8) e^{3x} (9) e^{x^2}
 (10) $(e^{x^2})^3$ (11) $\sin^{-1}(x^2)$ (12) $\tan^{-1}\frac{x}{2}$
 (13) $\tan^{-1}\frac{2}{x}$ (14) $(\cos^3 x - \sin^2 x + 3 \sin x)^8$

問題 3. 次の関数を微分せよ.

- (1) $\sqrt{x^2 + A}$ ($A \neq 0$) (2) $\log|f(x)|$ ($f(x) \neq 0$)
 (3) $\frac{1}{2a} \log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$ ($a \neq 0$) (4) $\log|x + \sqrt{x^2 + A}|$ ($A \neq 0$)
 (5) $x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a}$ ($a > 0$)

参考書籍

本文に登場する語句や記号, 証明は次の書籍を参考に執筆した. ただし定義や公理は微妙に異なる.

- 荒井正治 『理工系 微積分学 - 第 3 版 -』 (学術図書出版社)
 吹田信之・新保経彦 『理工系の微分積分学』 (学術図書出版社)
 三宅敏恒 『入門微分積分』 (倍風館)
 松坂和夫・片山孝次 『S ラング 解析入門 原書第 3 版』 (岩波書店)
 S. Lang “A First Course in Calculus (UTM) 5th Edition” (Springer-Verlag)

問題の略解

問題 1

- (1) $g(x) = x^2 + 3x + 5$ (2) $g(x) = x^2 + 3x + 5$ (3) $g(x) = x^2$
 (4) $g(x) = \sin x$ (5) $g(x) = x + \frac{\pi}{2}$ (6) $g(x) = |x + 1|$
 (7) $g(x) = x + 1$ (8) $g(x) = 3x$ (9) $g(x) = e^{x^2}$
 (10) $g(x) = 3x^2$ (11) $g(x) = x^2$ (12) $g(x) = \frac{x}{2}$
 (13) $g(x) = \cos^3 x - \sin^2 x + 3 \sin x$

($g(x)$ は上記以外にも存在する.)

問題 2

- (1) $10(x^2 + 3x + 5)^9(2x + 3)$ (2) $\frac{-10(2x + 3)}{(x^2 + 3x + 5)^{11}}$
 (3) $-2x \sin(x^2)$ (4) $5 \sin^4 x \cos x$
 (5) $10x \sin^4(x^2) \cos(x^2)$ (6) $\frac{1}{x + 1}$
 (7) $-\frac{1}{x}$ (8) $3e^{3x}$
 (9) $2xe^{x^2}$ (10) $6xe^{3x^2}$
 (11) $\frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$ (12) $\frac{2}{x^2 + 4}$
 (13) $\frac{-2}{x^2 + 4}$
 (14) $8(\cos^3 x - \sin^2 x + 3 \sin x)^7 (-3 \sin x \cos^2 x - 2 \sin x \cos x + 3 \cos x)$

問題 3

- (1) $\frac{x}{\sqrt{x^2 + A}}$ (2) $\frac{f'(x)}{f(x)}$ (3) $\frac{1}{x^2 - a^2}$ (4) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + A}}$
 (5) $2\sqrt{a^2 - x^2}$