置換積分

立命館大学理工学部数学学修相談会

2018 年 11 月 8 日 *

概要

関数の積分において, 合成関数を用いることにより, 変数を変えることが可能になり, その結果, 積分の計算が容易になることがよくある. 1 変数関数の積分において変数を取り替えて積分することを置換積分[*1]と呼ぶが, 置換積分は合成関数の微分法と密接に関連している. 合成関数の微分においては, 直観的な性質が成り立たないことも多く, 同様に置換積分においても若干の注意を要する. 置換積分について具体例を挙げながら解説する.

目次

1 はじめに

$y=(3x+1)^4$ について考えよう. x を定めると, y は唯一つに定まり, y は変数 x の関数である. これを変数 t に変換してみよう. 例えば $x=t$ とすると, $y=(3t+1)^4$ となり, 変数 t の関数に変換される. もう少し単純な t の関数にしたければ, $x=(t-1)/3$ とする. そうすれば $y=t^4$ となり, 先ほどよりも単純な t の関

* 執筆 平岡由夫

*1 多変数関数の積分においては変数変換と呼び, 変数を変換して積分するという意味では同様である.

数になる．一般には, $x = \varphi(t)$ ならば $y = (3\varphi(t) + 1)^4$ は t の関数になることが分かる．

変数 x の関数 $y = f(x)$ が与えられたとき, 変数 t の関数に変換したければ, $x = \varphi(t)$ を用意すると, その合成関数 $y = f(\varphi(t))$ として t の関数に変換できる．この考えを用いて, 変数を取り替えて積分しようというのが置換積分である．

$(3x+1)^4$ の不定積分を考えよう．展開してから積分すれば,

$$\begin{aligned}\int (3x+1)^4 \, dx &= \int (81x^4 + 108x^3 + 54x^2 + 12x + 1) \, dx \\ &= \frac{81}{5}x^5 + 27x^4 + 18x^3 + 6x^2 + x + C\end{aligned}$$

であるが, $t = 3x + 1$ となるように $x = (t-1)/3$ とおいて

$$\begin{aligned}\int (3x+1)^4 \, dx &= \int t^4 \left(\frac{t-1}{3}\right)' dt \\ &= \int \frac{t^4}{3} \, dt \\ &= \frac{t^5}{15} + C \\ &= \frac{(3x+1)^5}{15} + C \\ &\Bigg(= \frac{81}{5}x^5 + 27x^4 + 18x^3 + 6x^2 + x + \frac{1}{15} + C \\ &\quad = \frac{81}{5}x^5 + 27x^4 + 18x^3 + 6x^2 + x + C \Bigg)\end{aligned}$$

とする方法もある．(C は積分定数である.)

$(3x+1)^4$ の定積分も同様である．展開してから積分すれば,

$$\begin{aligned}\int_0^1 (3x+1)^4 \, dx &= \int_0^1 (81x^4 + 108x^3 + 54x^2 + 12x + 1) \, dx \\ &= \left[\frac{81}{5}x^5 + 27x^4 + 18x^3 + 6x^2 + x\right]_0^1 \\ &= \frac{81}{5} + 27 + 18 + 6 + 1 \\ &= \frac{341}{5}\end{aligned}$$

であるが, $t = 3x + 1$ となるように $x = (t-1)/3$ とおいて

$$\begin{aligned}\int_0^1 (3x+1)^4 \, dx &= \int_1^4 t^4 \left(\frac{t-1}{3}\right)' dt \\ &= \int_1^4 \frac{t^4}{3} \, dt \\ &= \left[\frac{t^5}{15}\right]_1^4 \\ &= \frac{4^5 - 1^5}{15} \\ &= \frac{341}{5}\end{aligned}$$

とする方法もある．それぞれの後者の方法が置換積分であり，$y = f(x) = (3x+1)^4$ について，$\varphi(t) = (t-1)/3$ を用意して

$$y = f(\varphi(t)) = t^4$$

となることを利用している．なお，一般には

$$\int f(x)\,dx \neq \int f(\varphi(t))\,dt$$

であり，

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

である．実際，$f(x) = (3x+1)^4$ のとき $\varphi(t) = (t-1)/3$ とすると

$$\begin{aligned}\int f(\varphi(t))\,dt &= \int t^4\,dt = \frac{t^5}{5} + C\\ &= \frac{243}{5}x^5 + 81x^4 + 54x^3 + 18x^2 + 3x + C\\ &\neq \int f(x)\,dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^4 f(\varphi(t))\,dt &= \int_1^4 t^4\,dt = \left[\frac{t^5}{5}\right]_1^4\\ &= \frac{1023}{5}\\ &\neq \int_0^1 f(x)\,dx\end{aligned}$$

である．

2　準備

本書で登場する記号や用語および命題をまとめておく．

2.1　区間

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と記す．$a < b$ をみたす $a, b \in \mathbb{R}$ について，

(1)　$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x \leqq b\}$
(2)　$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
(3)　$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x < b\}$
(4)　$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqq b\}$

の形で表される $\mathbb{R}$ の部分集合を**有界区間**といい，a, b を各区間の**端点**と呼ぶ．また，$a, b \in \mathbb{R}$ について

(5)　$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x\}$
(6)　$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqq b\}$
(7)　$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
(8)　$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
(9)　$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

の形で表される $\mathbb{R}$ の部分集合を**無限区間**といって，有界区間と無限区間を総称して**区間**と呼ぶ．また，(1), (9) の形の区間を**閉区間**といい，(2),(7),(8),(9) の形の区間を**開区間**と呼ぶ．(9) は閉区間でもあり，同時に開区間でもある．また，**有界閉区間**とは (1) の形の区間，**有界開区間**とは (2) の形の区間を意味する．

2.2 原始関数

高校数学や書籍によっては後に出てくる不定積分と原始関数は区別しないが, 本書では区別して扱う.

ある区間において定義される $f(x)$ について, 微分方程式[*2]

$$F'(x) = f(x) \tag{2.1}$$

をみたす関数[*3] $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**と呼ぶことにし, 特に, 特定の区間 I についての $x \in I$ においてのみ (2.1) をみたすときは $F(x)$ を $f(x)$ **区間 I における原始関数**と呼ぶことにする.

$$\left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x$$

なので $x^2/2$ は x の原始関数である. また

$$\left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)' = x$$

でもあるので $x^2/2 + 1$ も x の原始関数である.

$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数の 1 つであるとき, $F(x) + c$ (c は任意の定数) も $f(x)$ の原始関数となる, つまり

$$\{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\} \subset \{f(x) \text{ の原始関数全体 }\}$$

が成り立つことは明らかであるが, 逆に

$$\{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\} \supset \{f(x) \text{ の原始関数全体 }\}$$

つまり, 次の命題も成り立つ.

命題 2.1. $F(x)$, $G(x)$ がともに $f(x)$ の原始関数であるとき,

$$G(x) = F(x) + c$$

をみたす定数 c が存在する.

また, 微分可能性と連続性の関係により, 次の命題を得る.

命題 2.2. $f(x)$ の区間 I における原始関数 $F(x)$ は区間 I において連続でなければならない.

命題 2.2 は重要である. 例えば

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0)$$

であるので, I が 0 を含まない区間であるときは, $\log|x|$ は $1/x$ の区間 I における原始関数となるが, I が 0 を含む区間であるならば, I における $1/x$ の原始関数は存在しない.

注意 2.3. 有界閉区間 I における関数, 特に有界閉区間のみで定義される関数を取り扱う場合は, 端点における微分係数に注意しなければならない. その場合は片側微分を用いる. つまり, 有界閉区間 $I = [a, b]$ につ

[*2] 関数とその導関数や高階導関数を含む, 関数に関する方程式のこと.
[*3] 1 つではない.

いて,

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad F'(x) = f(x) \qquad (x \in (a,b)), \\
&(2) \quad \lim_{\Delta x \to +0} \frac{F(a+\Delta x) - F(a)}{\Delta x} = f(a), \\
&(3) \quad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{F(b+\Delta x) - F(b)}{\Delta x} = f(b)
\end{aligned}
$$

を全てみたすとき, $F(x)$ は $f(x)$ の閉区間 I における原始関数という. 一般に (2) の左辺の極限が収束するとき $F(x)$ は $x=a$ で**左微分可能**といい, その極限値を $F(x)$ の $x=a$ における**左微分係数**という. 同様に, (3) の左辺の極限が収束するとき $F(x)$ は $x=b$ で**右微分可能**といい, その極限値を $F(x)$ の $x=b$ における**右微分係数**という. 左微分係数と右微分係数を併せて**片側微分係数**または単に**片側微分**という. 有界閉区間 I でのみ定義される関数でも, 片側微分係数が存在するならば, I における導関数が定義できるのである. 広義積分の理論を用いると区間を開区間に限定して考察することにより, 片側微分の考察を回避することも可能であり, 近年の書籍には片側微分について記述していない場合もある.

2.3 微分積分学の基本定理

次の命題は, 高校の数学の教科書にも紹介されている. リーマン和の極限として定義される積分と, 平均変化率の極限として定義される微分という異なる概念を結びつける定理として有名であり, 微分積分学の基本定理と呼ばれる. リーマン和の極限を具体的に求める事は非常に困難であり, その極限である積分を, 微分方程式 $F'(x) = f(x)$ を解くことにより, 代入計算で定積分の値を求められるという大発見である. 本書の目的でもないので, 証明は省略する.

命題 2.4 (**微分積分学の基本定理**)**.** 有界閉区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ について

(1) $[a,b]$ で定義される関数 $F(x)$ を

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

と定義すると, $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である.

(2) $G(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) \tag{2.2}$$

である.

注意 2.5. (2.2) の右辺を $\Big[G(x)\Big]_a^b$ で表す.

この命題は, 有界閉区間で連続な関数には原始関数 (例えば, 命題の $F(x)$ など) が必ず存在することも言っている. $f(x)$ が有界閉区間 $[a,b]$ でのみ定義される関数であっても, 端点に関しては片側微分で考察すれば正しいことが分かる. なお, $f(x)$ が a を含む区間 I で連続であれば, 任意の $b(\neq a) \in I$ について, a と b を端点とする閉区間で $f(x)$ は連続である. よって, $f(x)$ の区間 I における原始関数が存在する.

例えば $x^2/2$ は $f(x) = x$ の原始関数であったので

$$\int_0^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 2$$

である. 一方 $f(x) = x$ のときの命題の $F(x)$ に関しては

$$\int_0^x t\,dt = \frac{1}{2}x^2, \qquad \int_1^x t\,dt = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \qquad \int_{-1}^x t\,dt = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

であり, 一般の $a \in \mathbb{R}$ については

$$F(x) = \int_a^x t\,dt = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2$$

となる.

2.4 合成関数の微分法

被積分関数 $f(x)$ の変数 x を t の関数 $x = \varphi(t)$ を用いて, 変数 t の関数の積分に「置換する」のが置換積分の目的である. 合成関数 $f(\varphi(t))$ の性質を知っておく必要がある. 特に, 次の命題は重要である.

命題 2.6 (**合成関数の微分法**)**.** $x = \varphi(t)$, $f(x)$ について, 開区間 I, 区間 J が $\varphi(I) \subset J$ をみたし, $\varphi(t)$ が I で微分可能, $f(x)$ が J で微分可能ならば, 合成関数 $y = f(\varphi(t))$ も I で微分可能であり,

$$\{f(\varphi(t))\}' = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

つまり

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

が成り立つ.

注意 2.7. ここで $\varphi(I)$ は $\mathbb{R}$ の部分集合

$$\varphi(I) = \{\varphi(t) \mid t \in I\}$$

を意味し, 以後同様の意味で用いる.

この命題の $f'(\varphi(t))$ とは, $f'(x) = \dfrac{d}{dx}f(x)$ と $\varphi(t)$ の合成関数であるし, $\dfrac{dy}{dx}$ を誤解の無いように $\dfrac{df}{dx}$ と記述することもある.

3 定積分の置換積分

3.1 定理とその例

基本となるのは次の定理である.

定理 3.1. $a, b \in J$ をみたす区間 J で連続な関数 $f(x)$ について, $\varphi(I) \subset J$ をみたす開区間 I で C^1 級な関数 $\varphi(t)$ が, $\alpha, \beta \in I$ において

$$\varphi(\alpha) = a, \qquad \varphi(\beta) = b$$

をみたすとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \tag{3.1}$$

が成り立つ.

注意 3.2. 数学書に不慣れなものにとっては, この定理の条件が煩わしいかもしれないが, 大雑把に言えば, 等式 (3.1) の両辺が意味のあるように条件を付けていると考えれば良い. $\varphi(t)$ が I で C^1 級とは, I の各点で微分可能であり, I で $\varphi'(t)$ が連続であることを意味する. したがって, 合成関数の連続性により, $f(\varphi(t))$ や, 右辺の被積分関数 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ は I で連続となる. $\alpha=\beta$ のとき $a=b$ となり, (3.1) が成り立つことは自明である. $\alpha\neq\beta$ のとき, α と β を端点とする有界閉区間を $I'(\subset I)$ [*4] とおくと, I' において $\varphi'(t)$ も連続であり, I' において $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ は積分可能であることが保証される.

なお, $\alpha\neq\beta$ であっても $a=b$ となることがある. しかし, $f(x)$ が a を含む区間 J で定義されるので, $a=b$ であっても定理は成り立つ.

注意 3.3. 実は I や J が閉区間であって, φ や f がそれぞれの区間でのみ定義される関数の場合も, 片側微分の考察で (3.1) が成り立つことが分かるが, 今は述べない.

証明. $\alpha=\beta$ のときは $a=b$ であり, (3.1) の両辺はともに 0 となるので成り立つ.

$\alpha\neq\beta$ のとき, α と β を端点とする有界閉区間を $I'(\subset I)$ とする. $f(x)$ は区間 J で連続, $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ は有界閉区間 I' で連続である. 微分積分学の基本定理 (命題 2.4) により原始関数が存在するので, $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ $(x\in J)$, $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ の原始関数の 1 つを $G(t)$ $(t\in I')$ とおく. 合成関数の微分法により $t\in I'$ において $F(\varphi(t))$ は微分可能であり,

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t))=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

となる. すなわち, $F(\varphi(t))$ も $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ の原始関数である. したがって, 命題 2.1 により

$$F(\varphi(t))=G(t)+c$$

をみたす定数 c が存在する. さらにこのとき, 微分積分学の基本定理 (命題 2.4) により

$$\begin{aligned}((3.1)\text{ の右辺})&=G(\beta)-G(\alpha)\\&=(F(\varphi(\beta)-c))-(F(\varphi(\alpha))-c)\\&=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))\\&=F(b)-F(a)\\&=((3.1)\text{ の左辺})\end{aligned}$$

が成り立つ □

例 3.1. $\displaystyle\int_1^2\frac{x}{x^2+1}\,dx$ を定理 3.1 を用いて求める.

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

とおく. このとき, $f(x)$ は $J=\mathbb{R}$ で連続であるので, 特に有界閉区間 $[1,2]$ でも連続, つまり積分可能である. (考え方) 被積分関数の複雑そうな部分が t となるように $\varphi(t)$ を見つければ上手く行くことが多い. 今の場合, 積分範囲 $[1,2]$ において $t=x^2+1$ をみたすような $x=\varphi(t)$ を見つける. (この場合は $\psi(x)=x^2+1$ の逆関数を具体的に求められるので, 意識しなくても解けるが, 一般には $\varphi(t)=\psi^{-1}(t)$ とすればよい.)

$$t=x^2+1\iff x=\pm\sqrt{t-1}$$

[*4] $\alpha<\beta$ のとき $I'=[\alpha,\beta]$, $\alpha>\beta$ のとき $I'=[\beta,\alpha]$ である.

であるが, 積分範囲 $1 \leqq x \leqq 2$ を考慮して, $\varphi(t) = \sqrt{t-1}$ とおく. ($\varphi(t) = \psi^{-1}(t)$ としている.) このとき, $J = \mathbb{R}$, $I = (1, \infty)$ とすれば, 定理の条件 $\varphi(I) \subset J$ をみたす.
$\varphi(t) = \sqrt{t-1}$ とすると, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(5) = 2$ であり,

$$2, 5 \in (1, \infty), \qquad \varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{t-1}} \quad (t \in (1, \infty))$$

である. したがって, 定理 3.1 より

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx &= \int_1^2 f(x)\,dx \\
&= \int_2^5 f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \\
&= \int_2^5 \frac{1}{2t}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\Big[\log|t|\Big]_2^5 \\
&= \frac{1}{2}(\log 5 - \log 2)
\end{aligned}$$

を得る.

逆関数の導関数を用いると次の系を得る.

系 3.4. a, b を含む開区間 J において $t = \psi(x)$ が C^1 級で狭義単調, さらに $x \in J$ において $\psi'(x) \neq 0$ であるとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(\psi^{-1}(t))\{\psi^{-1}(t)\}'\,dt \tag{3.2}$$

が成り立つ. ここで

$$\{\psi^{-1}(t)\}' = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\dfrac{dt}{dx}} = \frac{1}{\psi'(x)} = \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(t))}$$

である.

証明. $t = \psi(x)$ が開区間 J において $\psi(x)$ が C^1 級で狭義単調, さらに $x \in J$ において $\psi'(x) \neq 0$ であるので, 逆関数 $\psi^{-1}(t)$ が存在する. $\alpha = \psi(a)$, $\beta = \psi(b)$ とし, α, β を含み $I \subset \psi(J)$ をみたす開区間を I とおく.[*5] このとき, $\psi^{-1}(t)$ は I で C^1 級, さらに

$$\psi^{-1}(I) \subset J$$

をみたす. したがって, 定理 3.1 により, (3.2) を得る □

例 3.2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx$ を系 3.4 を用いて求める.

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

[*5] I が存在することは自明ではないが, 原理は次の通り. $a, b \in J$ について $\psi(a), \psi(b) \in \psi(J)$ であり, $a \neq b$ のとき $\psi(a)$, $\psi(b)$ を端点とする有界開区間は $\psi(J)$ に含まれる. したがって, a,b を端点とする閉区間には含まれない J の元 c と d を上手く選べば, $I = (\psi(c), \psi(d))$ と出来る.

とおく.

(考え方) 被積分関数の複雑そうな部分が t となるように $\psi(x)$ を見つければ上手く行くことが多い.

$I=(0,\infty)$, $t=\psi(x)=x^2+1$ とおく. このとき $1,2\in I$ であり, I において $\psi(x)$ は C^1 級であって, $\psi'(x)\neq 0$ さらに狭義単調増加である. したがって, $\psi^{-1}(t)$ が存在し, $x=\psi^{-1}(t)$ に注意すると

$$\begin{aligned}\{\psi^{-1}(t)\}' &= \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\dfrac{dt}{dx}} \\ &= \frac{1}{\dfrac{1}{dx}(x^2+1)} \\ &= \frac{1}{2x} \\ &= \frac{1}{2\psi^{-1}(t)}\end{aligned}$$

である. $t\in[\psi(1),\psi(2)]=[2,5]$ において $\psi^{-1}(t)\neq 0$, $t\neq 0$ だから,

$$\begin{aligned}f(\psi^{-1}(t))\{\psi^{-1}(t)\}' &= \frac{\psi^{-1}(t)}{t}\cdot\frac{1}{2\psi^{-1}(t)} \\ &= \frac{1}{2t}\end{aligned}$$

となる. したがって

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx &= \int_1^2 f(x)\,dx \\ &= \int_{\psi(1)}^{\psi(2)} f(\psi^{-1}(t))\{\varphi^{-1}(t)\}'\,dt \\ &= \int_2^5 \frac{1}{2t}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\Big[\log|t|\Big]_2^5 \\ &= \frac{1}{2}(\log 5-\log 2)\end{aligned}$$

を得る.

定理 3.1 の左辺と右辺を入れ替えた次の定理もよく使われる.

定理 3.5. $a,b\in I$ をみたす開区間 I で C^1 級な関数を $\psi(x)$ とし, $\psi(I)\subset J$ をみたす区間 J で連続な関数 $f(t)$ について

$$\int_a^b f(\psi(x))\psi'(x)\,dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(t)\,dt \tag{3.3}$$

が成り立つ.

例 3.3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx$ を定理 3.5 を用いて求める.

(考え方) 被積分関数の複雑そうな部分 x^2+1 を $t=\psi(x)$ として,

$$f(\psi(x))\psi'(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

をみたす $f(t)$ を見つければ上手く行くことが多い. $\psi(x) = x^2+1$ のとき, $\psi'(x) = 2x$ だから $x \neq 0$ のとき

$$f(\psi(x)) \cdot 2x = \frac{x}{\psi(x)} \iff f(\psi(x)) = \frac{1}{2\psi(x)}$$

をみたす $f(t)$ を見つければ良い. 例えば $f(t) = \dfrac{1}{2t}$ とすれば上手く行く.

$f(t) = \dfrac{1}{2t}$, $\psi(x) = x^2+1$ とすると, $\psi(x)$ は $I = \mathbb{R}$ で C^1 級である. また, $f(t)$ も $J = (0, \infty)$ において連続である. $\psi(I) = [1, \infty) \subset J$ が成り立ち,

$$f(\psi(x)) = \frac{1}{2(x^2+1)}, \qquad \psi'(x) = 2x$$

だから $x \in \mathbb{R}$ において

$$f(\psi(x))\psi'(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

である. したがって

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{x}{x^2+1}\, dx &= \int_1^2 f(\psi(x))\psi'(x)\, dx \\
&= \int_{\psi(1)}^{\psi(2)} f(t)\, dt \\
&= \int_2^5 \frac{1}{2t}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\Big[\log|t|\Big]_2^5 \\
&= \frac{1}{2}(\log 5 - \log 2)
\end{aligned}$$

を得る.

例 3.4. a を定数, m を正の整数としたときの

$$\int_{a-\pi}^{a+\pi} \sin mx \, \cos mx \, dx$$

を求める.

$f(t) = t/m$, $\psi(x) = \sin mx$ とおく. このとき,

$$f(\psi(x))\psi'(x) = \sin mx \, \cos mx$$

であり, $\psi(a-\pi) = \psi(a+\pi)$ であるので

$$\begin{aligned}
\int_{a-\pi}^{a+\pi} \sin mx \, \cos mx \, dx &= \int_{a-\pi}^{a+\pi} f(\psi(x))\psi'(x)\, dx \\
&= \int_{\psi(a-\pi)}^{\psi(a+\pi)} f(t)\, dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

を得る.

3.2 定積分の置換積分における注意

$x=\varphi(t)$ のとき $\dfrac{dx}{dt}=\varphi'(t)$ である. したがって, (3.1) は

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\frac{dx}{dt}\,dt$$

と記述することがある. また, $t=\psi(x)$ のとき, $x=\psi^{-1}(t)$ で $\dfrac{dx}{dt}=\{\psi^{-1}(t)\}'$ だから, (3.2) を

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(\psi^{-1}(t))\frac{dx}{dt}\,dt$$

と記述することがあるし, さらに (3.3) を

$$\int_a^b f(\psi(x))\frac{dt}{dx}\,dx=\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(t)\,dt$$

と記述することもある.

$\dfrac{dx}{dt}=g(t)$ のとき, 形式的に $dx=g(t)dt$ と記述することを決めておけば, 定理 3.1 の置換積分とは, 関数 $f(x)$ の変数を $x=\varphi(t)$ において t に置換したとき, (3.1) の左辺から右辺へは形式的には

$$f(x) \text{ は } f(\varphi(t)) \text{ に,} \qquad dx \text{ は } \varphi'(t)\,dt \text{ に}$$

置換されていて, 分数の計算のように左辺の dx を

$$dx=\frac{dx}{dt}\,dt=\varphi'(t)\,dt$$

と置き換えているように見える. また, その系においても形式的には同様に置き換えただけに見える. 但し, 導関数や積分で同じ記号を用いているが, 導関数 $\dfrac{dx}{dt}$ の dx や dt と積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ や $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ の dx や dt が同じものという保証もないので, 形式的であると思っていた方が良い. 逆関数の導関数を用いてる認識もなく, $t=\psi(x)$ から両辺を x で微分して安易に

$$\frac{dt}{dx}=\psi'(x)\Longrightarrow dx=\frac{1}{\psi'(x)}\,dt$$

とするのは良くない. 上述の定理や系では, これが正しい変換であることを保証していない.

なお,

$$\psi'(x)\,dx=dt$$

は形式的な記述としては許され, 定理 3.5 の (3.3) の左辺から右辺への形式的な変換である.

先ほどの例と同じ $x/(x^2+1)$ の定積分を, 積分範囲を $[-1,2]$ に換えて考えてみよう. つまり, 次の例題を考える.

例題 3.6. 定積分

$$\int_{-1}^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

を求めよ.

(間違った解答 1)

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1},\qquad \varphi_1(t)=-\sqrt{t-1},\qquad \varphi_2(t)=\sqrt{t-1}$$

とおく.

$$\varphi_1'(t)=-\frac{1}{2\sqrt{t-1}},\qquad \varphi_2'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t-1}} \tag{1}$$

であるが,

$$f(\varphi_1(t))\varphi_1'(t)=f(\varphi_2(t))\varphi_2'(t)=\frac{1}{2t} \tag{2}$$

が成り立ち, $\varphi_1(2)=-1$, $\varphi_1(1)=\varphi_2(1)=0$, $\varphi_2(5)=2$ に注意すれば

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}\frac{x}{x^2+1}\,dx&=\int_{-1}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{2}f(x)\,dx\\&=\int_{2}^{1}f(\varphi_1(t))\varphi_1'(t)\,dt+\int_{1}^{5}f(\varphi_2(t))\varphi_2'(t)\,dt \qquad (3)\\&=\int_{2}^{5}\frac{1}{2t}\,dt \qquad (4)\\&=\frac{1}{2}\Big[\log|t|\Big]_2^5\\&=\frac{1}{2}(\log 5-\log 2)\end{aligned}$$

を得る.

(間違った解答 2)

$$y=\frac{x}{x^2+1},\qquad t=\psi(x)=x^2+1$$

とおく. このとき

$$y=\frac{x}{t}$$

となる.

$$\frac{dt}{dx}=\psi'(x)=2x$$

より,

$$dx=\frac{1}{2x}\,dt \tag{5}$$

だから,

$$\frac{x}{x^2+1}\,dx=y\,dx=\frac{x}{t}\frac{1}{2x}\,dt=\frac{1}{2t}\,dt \tag{6}$$

と $\psi(-1)=2$, $\psi(2)=5$ に注意すれば

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}\frac{x}{x^2+1}\,dx&=\int_{-1}^{2}y\,dx\\&=\int_{\psi(-1)}^{\psi(2)}\frac{x}{t}\frac{1}{2x}\,dt \qquad (7)\\&=\int_{2}^{5}\frac{1}{2t}\,dt\\&=\frac{1}{2}\Big[\log|t|\Big]_2^5\\&=\frac{1}{2}(\log 5-\log 2)\end{aligned}$$

を得る.

(間違った解答 1) においては (1) が $t=1$ では成り立たない. したがって (2) も $t=1$ においては成り立たない. (3) における被積分関数は $t=1$ で定義されないので, (リーマン) 積分が定義されない.*6 (4) の等式も成り立たない. (間違った解答 2) においては, 出てきた式の文字 x を, 記号を都合良く変形して消去し, 文字 t だけの式に変形しているだけである. 文章問題に不慣れな小学生が, 文章中に登場する数字を意味も無く組み合わせて間違った答えを出す方法によく似ている. 明らかにおかしいところを指摘しておくと, (5) は積分範囲 $[-1,2]$ に含まれる $x=0$ で意味を持たない. (6) も同じであるが, 単なる記号のお遊びになっている. (7) はもはや意味不明の積分である. もちろん, $x=0$ で被積分関数が定義されていない.

上述のように, 間違った解答ではあるが最終的な値は (奇跡的に) 正しい. したがって, 途中の理論がおかしくても気付かないことが多く, 後に大きな間違いをしてしまうので注意すること. この例題は置換積分を用いない方が, 間違わない. 念のため解答を記述しておく.

(解答)

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}, \qquad F(x)=\frac{1}{2}\log(x^2+1)$$

とおく. $f(x)$ も $F(x)$ も $\mathbb{R}$ で連続な関数であり, 特に $\mathbb{R}$ において

$$F'(x)=f(x)$$

をみたす. したがって, $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である. よって

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}\frac{x}{x^2+1}\,dx &= \left[\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right]_{-1}^{2}\\ &= \frac{1}{2}\log 5-\frac{1}{2}\log 2\\ &= \frac{1}{2}(\log 5-\log 2)\end{aligned}$$

を得る.

積分の計算において, 被積分関数の原始関数を 1 つでも見つけることが出来れば値が求まることを忘れてはならない. ただし, 原始関数は無数に存在するが, いつでも簡単に見つけられるとは限らない. その時に, 部分積分や置換積分を用いるだけである. 原始関数が見つかるのに, 置換積分をわざわざ使って, 上記のように間違えると得することはないので注意すべきである.

定積分の計算においては, たった 1 つの原始関数を見つけられれば十分であるが, 微分方程式を解く際には, 全ての原始関数を求める必要も生じる. その際に必要となるのが不定積分の考えであった. 次に不定積分の置換積分について解説する.

4 不定積分の置換積分

4.1 不定積分

本書におけるにおける不定積分の定義は, 高校の数学で学んだと思われるものに近いものを採用しておく.

$$\{f(x)\ \text{の原始関数}\ \}=\{F(x)+c \mid c\in\mathbb{R}\}$$

*6 広義積分になっているのだが, どちらの広義積分も発散しているのでこの式は意味を持たない.

であるとき

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

と表し, $f(x)$ の**不定積分**という. 特に, $F(x)$ が $f(x)$ の区間 I における原始関数に限る場合は

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad (x \in I)$$

と記し, **区間 I における $f(x)$ の不定積分**という.[*7] なお, 右辺の C は**積分定数**と呼ばれる特別な演算が成り立つ記号である. 例えば $(x^2/2+1)' = (x^2/2)' = x$ だから

$$\frac{1}{2}x^2 + 1 + C = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

となり, 形式的には $1 + C = C$ が成り立つ. 同様に積分定数の演算において, 形式的には $C - C = C + (-1)\cdot C = C + C = C$ が成り立ち, $C - C \neq 0$ である. したがって, 不定積分と原始関数の区別をしない高校生が定積分において, 積分定数 C を付けて

$$\Big[F(x) + C\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

としてしまうのは正しくない.

$f(x)$ が区間 I において連続であるときは, 微分積分学の基本定理により, $f(x)$ の区間 I における原始関数 $F(x)$ が必ず存在し,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad (x \in I)$$

と書き表すことができる.

4.2 不定積分の置換積分

基本となるのは次の定理である.

定理 4.1. $f(x)$ が区間 J で連続であり, $x = \varphi(t)$ が開区間 I で C^1 級であり, $\varphi(I) \subset J$ をみたすとき,

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \tag{4.1}$$

が成り立つ.

注意 4.2. 条件 “$\varphi(I) \subset J$” は (区間 J における) $f(x)$ の原始関数が存在することを保証している.

注意 4.3. $\varphi(I)$ が区間であるときは, (4.1) の左辺は区間 $\varphi(I)$ における不定積分, 右辺は区間 I における不定積分である. 実用的ではないが, $\varphi(I)$ が区間でないときは, $C = C$ を意味する自明な等式となる.

特に, 等式 (4.1) は $x = \varphi(t)$ のもとでの等式であることに注意する必要がある. すなわち, $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を用いて表せば, ((4.1) の左辺) $= F(\varphi(t)) + C$ である.

注意 4.4. 実は, 区間 I や J が閉区間であり, 関数 φ や f がそれぞれの区間でのみ定義される関数であるときも, 区間の端点における議論を片側微分で考察すれば, (4.1) が成り立つが, ここでは省略する.

[*7] 数学の専門書では $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dx$ を $f(x)$ の不定積分と定義することがある. この定義は本書の定義とは異なる.

証明. $\varphi(I)$ が区間でないとき, $\varphi(I) \neq \emptyset$ であるので, $\varphi(I)$ は唯一つの元だけの集合になる. $\varphi(I) = \{a\}$ のとき, $\varphi(t) = a$ に限るので, $\varphi'(t) = 0$ である. よって,

$$((4.1)\text{ の右辺}) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dx = \int 0\,dx = C$$

であり, $f(x)$ は $a \in J$ をみたす区間 J で連続であるので, 区間 J における原始関数 $F(x)$ が存在する. このとき

$$((4.1)\text{ の左辺}) = \int f(x)\,dx = F(x) + C = F(\varphi(t)) + C = F(a) + C = C$$

であるので, (4.1) をみたす.

$\varphi(I)$ が区間であるとき, 条件より, $f(x)$ には原始関数が存在し, $f(x)$ の $\varphi(I)$ における原始関数を $F(x)$ とすると,

$$((4.1)\text{ の左辺}) = \int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad (x \in \varphi(I))$$

となる. 一方, 合成関数の微分法より

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \qquad (t \in I)$$

であるので,

$$((4.1)\text{ の右辺}) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C \qquad (t \in I)$$

となる. $x = \varphi(t)$ のとき $t \in I$ において $x \in \varphi(I)$ であり,

$$\{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\} = \{F(\varphi(t)) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

となる. よって, 不定積分の定義により (4.1) が成り立つ □

例 4.1. $\displaystyle\int x\cos(x^2)\,dx$ を求める.

(考え方) 被積分関数の複雑そうな部分 x^2 が t となるように $t = x^2 \iff x = \varphi(t)$ となる $\varphi(t)$ を見つけると上手く行くことが多い. $x \geqq 0$ のとき,

$$t = x^2 \iff x = \sqrt{t}$$

であり, $x \leqq 0$ のときは

$$t = x^2 \iff x = -\sqrt{t}$$

に注意して, $\varphi_1 = \sqrt{t}$, $\varphi_2 = -\sqrt{t}$ とする. なお, $t = 0$ において $\sqrt{t}$ は微分不可能であることにも注意する.

$f(x) = x\cos(x^2)$ とし, $I = (0, \infty)$ について, $\varphi_1(t) = \sqrt{t}$, $\varphi_2(t) = -\sqrt{t}$ とおくと, どちらも I で C^1 級であり, $\varphi_1(I) = (0, \infty)$, $\varphi_2(I) = (-\infty, 0)$ である.

$J_i = \varphi_i(I)$ $(i = 1, 2)$ とおくと, $f(x)$ は区間 J_i で連続である. また, $t \in I$ において

$$f(\varphi_1(t)) = \sqrt{t}\cos t, \qquad \varphi_1'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \qquad f(\varphi_2(t)) = -\sqrt{t}\cos t, \qquad \varphi_2'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{t}}$$

だから,

$$f(\varphi_i(t))\varphi_i'(t) = \frac{1}{2}\cos t \qquad (i = 1, 2)$$

をみたし, $x \in J_i$ において

$$\begin{aligned}\int x\cos(x^2)\,dx &= \int f(x)\,dx \\ &= \int f(\varphi_i(t))\varphi_i'(t)\,dt \qquad (t \in I) \\ &= \int \frac{1}{2}\cos t\,dt \qquad (t \in I) \\ &= \frac{1}{2}\sin t + C \qquad (t \in I) \\ &= \frac{1}{2}\sin(x^2) + C\end{aligned}$$

を得る.

(考え方) 0 を含まない区間 J_i における不定積分は求まったが, $\mathbb{R}$ における不定積分であることは, 以下に続くように確認する必要がある.

また,

$$\left\{\frac{1}{2}\sin(x^2)\right\}' = \frac{1}{2}\cos(x^2)\cdot(x^2)' = x\cos(x^2) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

であるので,

$$\int x\cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C$$

を得る.

上述のように $\varphi(t)$ を具体的に求めるために, $x > 0$ と $x < 0$ に分けて考えた. 一方, 定理 4.1 の右辺と左辺を入れ替えた次の定理もよく使われ, 場合によっては定理 4.1 より使いやすい.

定理 4.5. $t = \psi(x)$ が開区間 I で C^1 級であり, $\psi(I) \subset J$ をみたす区間 J において $f(t)$ が連続であるとき,

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt \tag{4.2}$$

が成り立つ.

注意 4.6. ここで, $\psi(I)$ が区間であるときは (4.2) の左辺は区間 I における不定積分, 右辺は区間 $\psi(I)$ における不定積分である.

注意 4.7. 定理 4.1 と同様, 区間 I や J が閉区間であり, 関数 ψ や f がそれぞれの区間でのみ定義される関数であるときも, 区間の端点における議論は片側微分で考察すれば, (4.2) が成り立つことが分かるが, 説明は省略する.

例 4.2. $\displaystyle\int x\cos(x^2)\,dx$ を定理 4.5 により求める.

(考え方) 被積分関数の複雑そうな部分 x^2 が t となるように, つまり $t = \psi(x) = x^2$ とおいて,

$$f(\psi(x))\psi'(x) = x\cos(x^2)$$

をみたす $f(t)$ を見つければ上手く行くことが多い. $\psi(x) = x^2$ のとき, $\psi'(x) = 2x$ だから $x \neq 0$ のときは

$$f(\psi(x))\cdot 2x = x\cos(\psi(x)) \iff f(\psi(x)) = \frac{1}{2}\cos(\psi(x))$$

をみたす $f(t)$ を見つければ良い. $f(t) = \dfrac{1}{2}\cos(t)$ とすると $x = 0$ のときも含めて, 上手く行く.

$f(t) = \dfrac{1}{2}\cos t$, $\psi(x) = x^2$ とすると, $\psi(x)$ は $I = \mathbb{R}$ で C^1 級である. また, $f(t)$ も $J = \mathbb{R}$ で連続であり, $\psi(I) = [0, \infty) \subset J$ をみたす.

$$f(\psi(x)) = \frac{1}{2}\cos(x^2), \qquad \psi'(x) = 2x$$

だから $x \in I = \mathbb{R}$ において

$$f(\psi(x))\psi'(x) = \cos(x^2)$$

であるので

$$\begin{aligned}
\int x\cos(x^2)\ dx &= \int f(\psi(x))\psi'(x)\ dx \\
&= \int f(t)\ dt \\
&= \int \frac{1}{2}\cos t\ dt \\
&= \frac{1}{2}\sin t + C \\
&= \frac{1}{2}\sin(x^2) + C
\end{aligned}$$

を得る.

上の例のように, 原始関数が見つけにくいときでも, 置換積分を用いて求められる事もある. ただし, 命題 2.2 に注意して, 原始関数は考えている区間で連続でなければならないことを忘れてはならない.

例 4.3. $\dfrac{x}{x^2+1}$ の原始関数を置換積分を用いて求める.
I を 0 を含まない区間とする. $f(t) = \dfrac{1}{2t}$, $t = \psi(x) = x^2 + 1$ とおくと, $x \in I$ において $t = \psi(x) \neq 0$ であり,

$$f(\psi(x))\psi'(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

である. よって, I において

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^2+1}\ dx &= \int f(\psi(x))\psi'(x)\ dx \\
&= \int f(t)\ dt \\
&= \int \frac{1}{2t}\ dt \\
&= \frac{1}{2}\log|t| + C \\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C
\end{aligned}$$

である.

一方, $\mathbb{R}$ においても

$$\left(\frac{1}{2}\log(x^2+1)\right)' = \frac{x}{x^2+1}$$

が成り立つので, $\dfrac{x}{x^2+1}$ の原始関数は

$$\frac{1}{2}\log(x^2+1) + c \qquad (\forall c \in \mathbb{R})$$

である.

4.3 閉区間でのみ定義される関数の積分に関する注意

不定積分において

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a}\right) + C \qquad (a > 0)$$

は有名な公式である. 右辺を微分することによって, $x \in (-a, a)$ においては正しいことは確認できる. また, 置換積分の一例として, 開区間 $(-a, a)$ において, $x = a \sin t$ を用いて右辺を求める方法が多くの本に記述されている.

左辺の被積分関数 $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ は閉区間 $[-a, a]$ で連続であり, $[-a, a]$ における原始関数は存在する. しかし,

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a}\right)$$

が開区間 $(-a, a)$ で微分可能なことは簡単に分かるが, $x = -a$ および $x = a$ で $F(x)$ が片側微分が可能である[*8] ことは自明ではない. また, これらの端点における言及がされていない書籍もある. その場合は $(-a, a)$ における原始関数として使用するしかない. 特に, $-a$ や a を含む区間における定積分の計算において安易に使用することは避けるべきである.

例 4.4. 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$ の値を求める.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx &= \left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1 - x^2} + \sin^{-1} x\right)\right]_{-1}^{1} & (1)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sin^{-1} 1 - \sin^{-1}(-1)\right)\\ &= \frac{\pi}{2} & (2)\end{aligned}$$

上記の計算例をよく見かける. この計算において (1) の等式は自明ではないし, 少なくとも高校数学の知識では正しくない. 何故なら, 右辺に現れる

$$\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1 - x^2} + \sin^{-1} x\right)$$

は $\sqrt{1 - x^2}$ の $[-1, 1]$ における原始関数とは限らないからである. 片側微分係数に関する考察をするか, 広義積分の知識を使う必要がある. ちなみに最終的な値 (2) は正しい. この公式を使わなくても, 次のような置換積分で求められる.

$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x = \varphi(t) = \sin t$ とおく. このとき, $f(x)$ は $J = [-1, 1]$ で連続であり, $\varphi(t)$ は $I = \mathbb{R}$ で C^1 級であり, $\varphi(I) \subset J$ をみたす. $-\pi/2, \pi/2 \in I$ であり,

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1, \qquad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

である. また,

$$f(\varphi(t)) = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$$

*8 実は, 片側微分係数まで考察すると $[-a, a]$ における原始関数であることが分かる.

であるが $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ において $\cos t \geqq 0$ に注意すると

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos t| \cos t\, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt \\
&= \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\cdot 0\right) - \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\cdot 0\right) \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

を得る.

練習問題

問題 1. 次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 x(2x+1)^3\, dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x+2}\, dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{(x^2+1)^2}\, dx$ (4) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} x\sqrt{x^2+3}\, dx$

問題 2. 次の定積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{x}{\sqrt{x^2+8}}\, dx$ (2) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} x(x^2-3)^5\, dx$

(3) $\displaystyle\int_2^{e} \frac{1}{2x\log x}\, dx$ (4) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx \quad (a>0)$

問題 3. 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x(2x+1)^3\, dx$ (2) $\displaystyle\int x\sqrt{x+2}\, dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2}\, dx$ (4) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+3}\, dx$

問題 4. 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \sin 3x\ \cos x\, dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1}\, dx$

問題 5. $a>0$ のとき $x = a\sin t$ として置換積分により, 開区間 $(-a, a)$ における次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx$ (2) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$

参考書籍

本文に登場する語句や記号, 証明は次の書籍を参考に執筆した. ただし定義や命題の表現および条件は微妙に異なる.

荒井正治	『理工系 微積分学 – 第 3 版 – 』	(学術図書出版社)
吹田信之 · 新保経彦	『理工系の微分積分学』	(学術図書出版社)
三宅敏恒	『入門微分積分』	(倍風館)

問題の略解

問題 1

(1) $\dfrac{71}{10}$ (2) $-\dfrac{2}{5}\sqrt{3}+\dfrac{16}{15}\sqrt{2}$ (3) $\dfrac{1}{2}\left(\log 2-\dfrac{1}{2}\right)$ (4) $\dfrac{1}{3}\left(8-7\sqrt{7}\right)$

問題 2

(1) $2\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\,\right)$ (2) $-\dfrac{21}{4}$ (3) $-\dfrac{1}{2}\log(\log 2)$ (4) $\dfrac{a^2}{2}\pi$

問題 3

(1) $\dfrac{1}{20}(2x+1)^5-\dfrac{1}{16}(2x+1)^4+C=\dfrac{8}{5}x^5+3x^4+2x^3+\dfrac{1}{2}x^2+C$

(2) $\dfrac{2}{5}(x+2)^2\sqrt{x+2}-\dfrac{4}{3}(x+2)\sqrt{x+2}+C$

(3) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2+1}+\log(x^2+1)\right)+C$

(4) $\dfrac{1}{3}(x^2+3)\sqrt{x^2+3}+C$

問題 5

(1) $-\dfrac{1}{8}\cos 4x-\dfrac{1}{4}\cos 2x+C$ (2) $x-\log(e^x+1)+C$

問題 5

(1) $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}+C$ (2) $\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\dfrac{x}{a}\right)+C$