行列の計算ドリルの解答例と解説

立命館大学理工学部数学学修相談会

2018 年 4 月 16 日 *

概要

大学や高校などで使用する教科書には解答がないのが常識である. 解答が付いていると, その解答を丸暗記したり, 丸写ししてしまう者もいて, 教育的に良くない. しかしながら, 今回はサブテキスト「0004 行列の計算ドリル」の解答例と解説をしておく. 解答例はあくまでも参考にする程度で良いと思う. 自分の言葉で論理的に正しい解答が掛けるように努力して欲しい. また, 最終の数値が合っているだけで, 安心してはいけない. $(1+2)-3$ と $1+(2-3)$ はどちらも 0 であるが途中式が異なる. 括弧の中を優先して計算するので, 前者は

$$(1+2)-3=3-3=0$$

であるが, 後者は

$$1+(2-3)=1+(-1)=1-1=0$$

となる. 解答例の途中式も十分理解しておくことが重要になる.

2 成分, 行, 列, 転置行列

問題 2.1. 行列 $A=[a_{ij}]_{m,n}$ と $B=[b_{ij}]_{m',n'}$ が等しいとは行列のサイズが同じで, 各成分が全て等しいこと, つまり

$$\begin{cases} m=m',\ n=n' \\ a_{ij}=b_{ij} \quad (i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n) \end{cases}$$

が成り立つことである. したがって,

$$\begin{cases} -1=2b \\ 0=c \\ 7=-d \\ a=2 \\ 3=3e \\ 4=6f \end{cases}$$

を解いて, 実数 $a=2$, $b=-1/2$, $c=0$, $d=-7$, $e=1$, $f=2/3$ を得る.

問題 2.2. $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とおくと与えられた等式は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ a & b & 1 \\ c & d & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

* 執筆 平岡由夫

と同じである．これを解くと $a=0$, $b=2$, $c=2$, $d=1$ を得るので, 求める行列 A は

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

である．

問題 2.3. (1) a_{21} は行列 A の $(2,1)$–成分であるので $a_{21}=3$ である．
(2) A の第 2 行は $\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$ である．
(3) A の第 2 列は $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ である．
(4) ${}^tA = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ であるので, その第 1 列は $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ である．

問題 2.4.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

であるので

$${}^t\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad {}^t\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad {}^t\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である．したがって,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である．

(1) ${}^tA = {}^t\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ である．

(解説) つまり ${}^tA = B$ であり, 一般に ${}^t\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$ が成り立つ．

(2) ${}^tB = {}^t\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ である．

(解説) つまり ${}^tB = A$ であり, 一般に ${}^t\begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$ が成り立つ．

(3) (1) より ${}^t({}^tA) = {}^t\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ である．

(解説) 一般に ${}^t({}^tA) = A$ が成り立つ．

問題 2.5. (1) 行列は全て長方形に成分が並ぶので

$$M = \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B}} \\ 2 & 0 & & \\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{C} & 3 & -3 \end{array}\right]$$

となり B のサイズは 2×2, C のサイズは 1×2, M のサイズは 3×4 となる.

(2) (1) より, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}$ とおくと

$$\begin{aligned} {}^tM &= {}^t\left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & b_{11} & b_{12} \\ 2 & 0 & b_{21} & b_{22} \\ \hdashline c_1 & c_2 & 3 & -3 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 2 & c_1 \\ 1 & 0 & c_2 \\ \hdashline b_{11} & b_{21} & 3 \\ b_{12} & b_{22} & -3 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 2 & {}^tC \\ 1 & 0 & \\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{{}^tB} & \begin{matrix} 3 \\ -3 \end{matrix} \end{array}\right] \end{aligned}$$

である.

(解説) 一般に, A, B, C, D, および $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ が行列であるとき,

$${}^t\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{bmatrix}$$

が成り立つ. 確かめよ.

3 行列の和と差, スカラー倍

問題 3.1.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

のとき

$${}^tA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad {}^tB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

である.

(1) $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+1 & 1+2 & 2+3 \\ -1+0 & 2+1 & 2+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $B + A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+1 & 3+2 \\ 0+(-1) & 1+2 & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(解説) 実数 a, b について $a+b = b+a$ が成り立ったが, 同じサイズの行列 A, B についても $A+B = B+A$ が成り立つ.

(3) $A - B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-1 & 1-2 & 2-3 \\ -1-0 & 2-1 & 2-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(4) $B - A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-0 & 2-1 & 3-2 \\ 0-(-1) & 1-2 & -1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

(解説) 一般には $A - B \neq B - A$ である.

(5) ${}^tA + {}^tB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+1 & -1+0 \\ 1+2 & 2+1 \\ 2+3 & 2+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

(6) (1) より ${}^t(A+B) = {}^t\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

(解説) 一般に ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ が成り立つ. 確かめよ.

(7) ${}^tA - {}^tB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-1 & -1-0 \\ 1-2 & 2-1 \\ 2-3 & 2-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

(8) (3) より ${}^t(A-B) = {}^t\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

(解説) 行列の差についても ${}^t(A-B) = {}^tA - {}^tB$ が成り立つ. これは ${}^t(-B) = -{}^tB$ が成り立つからである.

問題 3.2. (1)

$$\begin{aligned}(A+B)+C &= \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 10 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}A+(B+C) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 10 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

(解説) 実数 a, b, c について $(a+b)+c = a+(b+c)$ が成り立ったように一般に, 同じサイズの行列 A, B, C についても $(A+B)+C = A+(B+C)$ が成り立つ.

(3)

$$\begin{aligned}(A-B)-C &= \left(\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\5 & 1 & -1\end{bmatrix}\right)-\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\-3 & 1 & 0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\-4 & 1 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\-3 & 1 & 0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\-1 & 0 & 4\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}A-(B-C) &= \begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}-\left(\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\5 & 1 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\-3 & 1 & 0\end{bmatrix}\right)\\ &= \begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 3 & 1\\8 & 0 & -1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}3 & -2 & 4\\-7 & 2 & 4\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(解説) 一般には $(A-B)-C \neq A-(B-C)$ である.

問題 3.3. (1) $A-A=\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}(=O_{2,2})$

(2) $B-B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}(=O_{2,3})$

(解説) 行列 A が $m\times n$ 行列の時 $A-A=O_{m,n}$ となる. 実数 a と b については常に $a-a=b-b=0$ であったが, 行列 A と B のサイズが異なるならば, $A-A\neq B-B$ である.

(3)

$$\begin{aligned}A+A+A &= \begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 4\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0+0+0 & 1+1+1\\(-1)+(-1)+(-1) & 4+4+4\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}3\cdot 0 & 3\cdot 1\\3\cdot(-1) & 3\cdot 4\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0 & 3\\-3 & 12\end{bmatrix}\\ &(=3A)\end{aligned}$$

(解説) 一般に $A+A+A=3A$ となる.

(4)

$$\begin{aligned}\underbrace{A+A+\cdots+A}_{n} &= \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 4\end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 4\end{bmatrix}}_{n}\\ &= \begin{bmatrix}\underbrace{0+0+\cdots+0}_{n} & \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}\\ \underbrace{(-1)+(-1)+\cdots+(-1)}_{n} & \underbrace{4+4+\cdots+4}_{n}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0 & n\\-n & 4n\end{bmatrix}\\ &(=nA)\end{aligned}$$

(解説) 実数 a において $\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n}=na$ が成り立つが, 行列 A に関しても一般に $\underbrace{A+A+\cdots+A}_{n}=nA$ が成り立つ.

問題 3.4. A は 2×3 行列であるので

$$O=O_{2,3}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

である.

(1) $A+O=\begin{bmatrix}-2&1&-5\\1&2&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+0&1+0&-5+0\\1+0&2+0&3+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1&-5\\1&2&3\end{bmatrix}(=A)$

(2) $O+A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&1&-5\\1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+(-2)&0+1&0+(-5)\\0+1&0+2&0+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1&-5\\1&2&3\end{bmatrix}(=A)$

(解説) 実数 a において $a+0=0+a=a$ が成り立つように, 行列 A においても $A+O=O+A=A$ が成り立つ.

(3) $A-O=\begin{bmatrix}-2&1&-5\\1&2&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2-0&1-0&-5-0\\1-0&2-0&3-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1&-5\\1&2&3\end{bmatrix}(=A)$

(解説) 実数 a において $a-0=a$ が成り立つように, 行列 A においても $A-O=A$ が成り立つ.

(4) $O-A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2&1&-5\\1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0-(-2)&0-1&0-(-5)\\0-1&0-2&0-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&5\\-1&-2&-3\end{bmatrix}(=-A)$

(解説) 実数 a において $0-a=-a$ が成り立つように, 行列 A においても $O-A=-A$ が成り立つ.

問題 3.5. 行列 A は 3×2 行列なので, 行列 X も 3×2 行列である.

$$X=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\\x_{31}&x_{32}\end{bmatrix}$$

とおくと与えられた方程式は

$$\begin{bmatrix}-2&1\\-3&0\\1&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\\x_{31}&x_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1\\-3&0\\1&2\end{bmatrix}$$

と同値である. すなわち

$$\begin{bmatrix}-2+x_{11}&1+x_{12}\\-3+x_{21}&0+x_{22}\\1+x_{31}&2+x_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1\\-3&0\\1&2\end{bmatrix}$$

をみたす $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32}$ を求めれば良い.

$$\begin{cases}-2+x_{11}=-2\\1+x_{12}=1\\-3+x_{21}=-3\\0+x_{22}=0\\1+x_{31}=1\\2+x_{32}=2\end{cases}$$

を解いて

$$x_{11}=x_{12}=x_{21}=x_{22}=x_{31}=x_{32}=0$$

を得る. したがって求める X は

$$X=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}(=O_{2,3})$$

である.

(解説) 実数 a について $a+x=a$ を満たす x は 0(零) に限ったように, $m \times n$ 行列 A についても $A+X=A$ を満たす行列 X は $O_{m,n}$(零行列) に限る.

問題 3.6. (1) 行列 A のスカラー (実数) $\dfrac{1}{2}$ 倍は A の各成分を $\dfrac{1}{2}$ 倍すれば良い.

$$\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 3/2 & 0 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

(2) 行列 A は 3×2 行列なので, 行列 X も 3×2 行列である.

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix}$$

とおくと, 与えられた方程式の左辺は

$$A + X = \begin{bmatrix} 2+x_{11} & -1+x_{12} \\ 3+x_{21} & 0+x_{22} \\ 1+x_{31} & -2+x_{32} \end{bmatrix}$$

であり, 右辺は

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

である. よって与えられた方程式は

$$\begin{bmatrix} 2+x_{11} & -1+x_{12} \\ 3+x_{21} & 0+x_{22} \\ 1+x_{31} & -2+x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

と同値である. これを解いて

$$x_{11}=2,\ x_{12}=-1,\ x_{21}=3,\ x_{22}=0,\ x_{31}=1,\ x_{32}=-2$$

となるので

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

である.

(解説) すなわち $X=A$ である. 与えられた方程式の両辺に $-A$ を加えると左辺は X, 右辺は A となるのでしたがって,

$$A+X=2A \Longrightarrow X=A$$

逆に $X=A$ の両辺に A を加えると

$$X=A \Longrightarrow A+X=2A$$

であるので

$$A+X=2A \iff X=A$$

である.

実数において

$$a = b \iff a + c = b + c$$

が成り立ったように, 行列の等式 $A = B$ について, C が A (B) と同じサイズの行列とすると,

$$A = B \iff A + C = B + C$$

がなりたつ.

(3) (2) と同様に行列 Y を

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \\ y_{31} & y_{32} \end{bmatrix}$$

とおく. このとき, 与えられた方程式は

$$\begin{bmatrix} 2 + y_{11} & -1 + y_{12} \\ 3 + y_{21} & 0 + y_{22} \\ 1 + y_{31} & -2 + y_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{3}y_{11} & -\dfrac{1}{3}y_{12} \\ -\dfrac{1}{3}y_{21} & -\dfrac{1}{3}y_{22} \\ -\dfrac{1}{3}y_{31} & -\dfrac{1}{3}y_{32} \end{bmatrix}$$

と同値である. これを解いて,

$$Y = \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{2} & \dfrac{3}{4} \\ -\dfrac{9}{4} & 0 \\ -\dfrac{3}{4} & \dfrac{3}{2} \end{bmatrix}$$

を得る.

(解説) $Y = -\dfrac{3}{4}A$ である. 与えられた方程式の両辺に $-Y$ を加えると

$$A + Y = -\frac{1}{3}Y \iff A = -\frac{4}{3}Y$$

であり, $A = -\dfrac{4}{3}Y$ の両辺にスカラー $-3/4$ を掛ければ,

$$A = -\frac{4}{3}Y \Longrightarrow Y = -\frac{3}{4}A$$

であり, 逆に $-4/3$ を掛ければ

$$Y = -\frac{3}{4}A \Longrightarrow A = -\frac{4}{3}Y$$

を得るので, 与えられた方程式は

$$Y = -\frac{3}{4}A$$

と同値である.

実数において $c \neq 0$ のとき

$$a = b \iff ca = cb$$

が成り立ったように, 行列の等式 $A = B$ について, c を 0 でないスカラーとすると

$$A = B \iff cA = cB$$

がなりたつ. $c = 0$ のときは成り立つとは限らない.

問題 3.7. (1)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(A-3B) &= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}-2 & 1\\-3 & 0\\1 & 2\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}2 & -1\\3 & 0\\1 & -2\end{bmatrix}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}-2 & 1\\-3 & 0\\1 & 2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}6 & -3\\9 & 0\\3 & -6\end{bmatrix}\right)\\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-8 & 4\\-12 & 0\\-2 & 8\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-4 & 2\\-6 & 0\\-1 & 4\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}A - \frac{3}{2}B &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2 & 1\\-3 & 0\\1 & 2\end{bmatrix} - \frac{3}{2}\begin{bmatrix}2 & -1\\3 & 0\\1 & -2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{2}\\-\frac{3}{2} & 0\\\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & -\frac{3}{2}\\\frac{9}{2} & 0\\\frac{3}{2} & -3\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-4 & 2\\-6 & 0\\-1 & 4\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}A\right) &= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\begin{bmatrix}-2 & 1\\-3 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}\right)\\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-3 & \frac{3}{2}\\-\frac{9}{2} & 0\\\frac{3}{2} & 3\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{2}\\-\frac{3}{2} & 0\\\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(4)

$$\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)A = \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)\begin{bmatrix}-2 & 1\\-3 & 0\\1 & 2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2 & 1\\-3 & 0\\1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{2}\\-\frac{3}{2} & 0\\\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$$

(5)

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)(2A-3B) &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\left(2\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -3 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}\right)\\
&= \frac{5}{6}\left(\begin{bmatrix}-4 & 2\\ -6 & 0\\ 2 & 4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}6 & -3\\ 9 & 0\\ 3 & -6\end{bmatrix}\right)\\
&= \frac{5}{6}\begin{bmatrix}-10 & 5\\ -15 & 0\\ -1 & 10\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}-\frac{25}{3} & \frac{25}{6}\\ -\frac{25}{2} & 0\\ -\frac{5}{6} & -\frac{25}{3}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

問題 3.8. (1) $a(bA) = a\begin{bmatrix}b & 2b & 3b\\ 4b & 5b & 6b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ab & 2ab & 3ab\\ 4ab & 5ab & 6ab\end{bmatrix}$

(2) $(ab)A = \begin{bmatrix}(ab)\cdot 1 & (ab)\cdot 2 & (ab)\cdot 3\\ (ab)\cdot 4 & (ab)\cdot 5 & (ab)\cdot 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ab & 2ab & 3ab\\ 4ab & 5ab & 6ab\end{bmatrix}$

(解説) (1), (2) の結果より $a(bA) = (ab)A$ である. 一般に, a と b をスカラー, A を行列とするとき

$$a(bA) = (ab)A = (ba)A = b(aA)$$

が成り立つ.

(3) $(a-a)A = 0\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} (= O_{2,3})$

(解説) 一般に a をスカラー, A を $m\times n$ 行列とするとき

$$(a-a)A = 0A = O_{m,n}$$

が成り立つ.

(4) $aA + bA = \begin{bmatrix}a & 2a & 3a\\ 4a & 5a & 6a\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b & 2b & 3b\\ 4b & 5b & 6b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a+b & 2a+2b & 3a+3b\\ 4a+4b & 5a+5b & 6a+6b\end{bmatrix}$

(5) $(a+b)A = \begin{bmatrix}(a+b)\cdot 1 & (a+b)\cdot 2 & (a+b)\cdot 3\\ (a+b)\cdot 4 & (a+b)\cdot 5 & (a+b)\cdot 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a+b & 2a+2b & 3a+3b\\ 4a+4b & 5a+5b & 6a+6b\end{bmatrix}$

(解説) (3), (4) の結果より $(a+b)A = aA + bA$ である. 一般に a と b をスカラー, A を行列としたとき,

$$(a+b)A = aA + bA$$

が成り立ち, 前問 (1), (2) のように a をスカラー, A と B を同じサイズの行列としたとき,

$$a(A+B) = aA + aB$$

も成り立つ.

4 行列の積

問題 4.1. (1)

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1\cdot 0 + (-1)\cdot 2 & 1\cdot(-3) + (-1)\cdot 3 \\ -2\cdot 0 + 1\cdot 2 & -2\cdot(-3) + 1\cdot 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
BA &= \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0\cdot 1 + (-3)\cdot(-2) & 0\cdot(-1) + (-3)\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 3\cdot(-2) & 2\cdot(-1) + 3\cdot 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

(解説) 実数 a, b については $ab = ba$ が常に成り立つが, 行列 A, B に関しては一般に $AB \neq BA$ である.

(3) (2) より

$$
\begin{aligned}
A(BA) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -16 & 7 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

(4) (1) より

$$
\begin{aligned}
(AB)A &= \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -16 & 7 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

(解説) 実数 a, b, c において $a(bc) = (ab)c$ が成り立ったように, 行列 A, B, C においても, 積 AB, BC が定義されるなら $A(BC) = (AB)C$ が成り立つ. 確かめよ.

問題 4.2. (1)

$$
AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ 1 & 3 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix},
$$

$$
BA = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ 1 & 3 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 3 & -4 & 6 \\ 2 & -\frac{7}{2} & \frac{13}{2} \end{bmatrix}
$$

(2) (1) より

$$A(BA) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 3 & -4 & 6 \\ 2 & -\frac{7}{2} & \frac{13}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{13}{2} & \frac{27}{2} \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

(3) (1) より

$$(AB)A = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{13}{2} & \frac{27}{2} \\ -4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

(解説) 前問の解説にあるように, 同じサイズの正方行列に限らず, 積 AB, BC が定義されるならば, $A(BC) = (AB)C$ が成り立つ.

(4) ${}^tA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, ${}^tB = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ より

$${}^tA{}^tB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -4 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} & 6 & \frac{13}{2} \end{bmatrix}$$

(5) (1) より

$${}^t(AB) = {}^t\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix},$$

同様に (1) より

$${}^t(BA) = {}^t\begin{bmatrix} -3 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 3 & -4 & 6 \\ 2 & -\frac{7}{2} & \frac{13}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -4 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} & 6 & \frac{13}{2} \end{bmatrix} (= {}^tA{}^tB)$$

(解説) 一般には ${}^t(AB) \neq {}^tA{}^tB$ であるが

$${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$$

は常に成り立つ. 確かめよ.

問題 4.3. (1) $AA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

(2) (1) より $A(AA) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}$

(3) (1) より $(AA)A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}$

(解説) 正方行列 A については A のべき乗 $A^n = \underbrace{AA\cdots A}_{n}$ が定義される.

問題 4.4. (1)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

である. よって

$$A^3 = (A^2)A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \\ -9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

である.

(解説) A^3 は $A(A^2)$ と計算しても同じである.

(2)

$$D^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

であり,

$$D^3 = (D^2)D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$$

である.

(解説) つまり

$$D^3 = \begin{bmatrix} (-1)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3^3 \end{bmatrix}$$

となっている.

(3) $D^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ であることを数学的帰納法で示す.

[1] $n = 1$ のとき

$$D^1 = D = \begin{bmatrix} (-1)^1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^1 \end{bmatrix}$$

で成り立つ.

[2] $n = k$ で成り立つと仮定すると,

$$D^{k+1} = (D^k)D = \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{k+1} \end{bmatrix}$$

となり, $n = k + 1$ でも成り立つ.

以上 [1],[2] より $n = 1, 2, 3, \dots$ のとき

$$D^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$$

である.

(解説) 一般に, D が (m 次) 対角行列, つまり

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_m \end{bmatrix}$$

のように対角成分以外がすべて 0 の行列であるならば

$$D^n = \begin{bmatrix} {d_1}^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {d_2}^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & {d_m}^n \end{bmatrix}$$

が成り立つ.

問題 4.5. (1) $U^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

(2) $U^3 = (U^2)U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -23 \\ 0 & 8 & -38 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$

(解説) この U のように n 次正方行列 $A = [a_{ij}]_{n,n}$ の成分が $a_{i,j} = 0$ $(i > j)$ を満たすとき, A は上三角行列という. この例のように, 上三角行列の積は上三角行列になる. また, 和差やスカラー倍に関しても上三角行列になる.

問題 4.6. 1. $Z^2 = \begin{bmatrix} 0 & 19 & 17 \\ 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 19 & 17 \\ 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 399 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. $Z^3 = (Z^2)Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 399 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 19 & 17 \\ 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. $Z^4 = (Z^3)Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 19 & 17 \\ 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(解説) 正方行列 A について $A \neq O$ であっても $A^m = O$ となる m が存在する場合がある. 一般に正方行列 A について, $A^m = O$ となる自然数 m があるとき, A をべき零行列という. この問題に登場する Z は $Z^3 = O$ ($Z^4 = O$ でもある) だから, べき零行列である.

問題 4.7. (1) $AO_{3,3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (= O_{3,3})$

(2) $O_{3,3}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (= O_{3,3})$

(解説) 実数 a について $a0 = 0a = 0$ が成り立ったように $m \times n$ 行列 A について

$$AO_{n,\ell} = O_{m,\ell}\ , \qquad O_{\ell,n}A = O_{\ell,n}$$

が成り立つ. 特に, (1), (2) のように A が m 次正方行列の時は

$$AO_{m,m} = O_{m,m}A = O_{m,m}$$

が成り立つ. つまり, 零行列は行列の積において, 実数の積における 0 のような役割をする.

(3) $AE_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} (= A)$

(4) $E_3A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} (= A)$

(解説) 実数 a について $a1 = 1a = 1$ が成り立ったように $m \times n$ 行列 A について

$$AE_n = A, \quad E_mA = A$$

が成り立つ. 特に, (3), (4) のように A が m 次正方行列の時は

$$AE_m = E_mA = A$$

が成り立つ. つまり, 単位行列は行列の積において, 実数の積における 1 のような役割をする.

(5) $(cE_3)A = \left(c \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & c & 3c \\ 2c & 3c & 3c \\ -c & 2c & 4c \end{bmatrix} = (cA)$

(6) $A(cE_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \left(c \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & c & 3c \\ 2c & 3c & 3c \\ -c & 2c & 4c \end{bmatrix} = (cA)$

(解説) 行列 cE, すなわち

$$cE = \begin{bmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & c \end{bmatrix}$$

と A との積は, スカラー倍 cA と等しくなる. cE をスカラー行列と呼ぶ.

問題 4.8. (1) A は 3 列の行列なので, 積 $AO_{m,n}$ における $O_{m,n}$ は 3 行でなければ定義されない. つまり, $m = 3$ でなければならない. また, 積 $AO_{3,n}$ が 3 列の行列になるには $O_{3,n}$ が 3 列の行列, すなわち $n = 3$ でなければならない. さらに, $AO_{3,3} = O_{3,3}$ となるので, $m = 3$, $n = 3$ である.

(2) (1) と同様 A は 3 列の行列なので, $m = 3$ でないと $AO_{m,n}$ は定義されない. また, $AO_{3,n}$ が 2 列の行列になるには $n = 2$ でなければならない. さらに, $AO_{3,2} = O_{3,2}$ となるので, $m = 3$, $n = 2$ である.

(3) A は 2 行の行列なので, 積 $O_{m,n}A$ における $O_{m,n}$ は 2 列でなければ定義されない. つまり, $n = 2$ でなければならない. また, 積 $O_{m,2}A$ が 2 行の行列になるには $O_{m,2}$ が 2 列の行列, すなわち $m = 2$ でなければならない. さらに, $O_{2,2}A = O_{2,3}$ となるので, $m = 2$, $n = 2$ である.

(4) (3) と同様 A は 2 行の行列なので, 積 $O_{m,n}A$ は $n = 2$ でないと定義されない. また, $O_{m,2}A$ が 3 行の行列になるには $m = 3$ でなければならない. さらに, $O_{3,2}A = O_{3,3}$ となるので, $m = 3$, $n = 2$ である.

問題 4.9. (1) A は 2 行の行列なので, 積 E_nA における E_n は 2 列でなければ定義されない. つまり, $n = 2$ でなければならない. また, $E_2A = A$ となるので, $n = 2$ である.

(2) A は 3 列の行列なので, 積 AE_n における E_n は 3 行でなければ定義されない. つまり, $n = 3$ でなければならない. さらに, $AE_3 = A$ となるので, $n = 3$ である.

(解説) 右からの積と左からの積では行列のサイズが一般には異なる. 単位行列の積においても同様である.

問題 4.10. 行列 A, B を

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

とする. 次の問いに答えよ.

(1) $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(解説) 実数 $a \neq 0$, $b \neq 0$ に関して $ab \neq 0$ であったが, 行列 $A \neq O$, $B \neq O$ であっても $AB = O$ や $BA = O$ になることがある.

(2) $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ とおいて $AX = O$ を考えると

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 0 \\ x_{12} + x_{22} = 0 \end{cases}$$

をみたす X を見つければ良いことになる. 例えば $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ や $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ などがあるが, 他にも $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ など

$$X = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_1 & -c_2 \end{bmatrix} \qquad (c_1,\, c_2 \text{ は実数})$$

はすべて方程式を満たす. 実際

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_1 & -c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - c_1 & c_2 - c_2 \\ -c_1 + c_1 & -c_2 + c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

である.

問題 4.11. (1) $B + C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$,

$BC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$,

$CB = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}$

(2) $AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$,

$AC = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 13 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

(3) $BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$,

$CA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

(4) (1) より

$$\begin{aligned} A(B + C) &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 20 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であり, これは (2) より $AB + AC$ に等しい. また

$$\begin{aligned}(B+C)A &= \begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & -1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-3 & -5\\ -6 & -6\end{bmatrix}\end{aligned}$$

であり, これは (3) より $BC + CA$ に等しい.

(解説) 実数 a, b, c については $a(b+c) = (b+c)a$ であった. これは $ab = ba$, $ac = ca$ であるので

$$a(b+c) = ab + ac = ba + ca = (b+c)a$$

が成り立つからである. 一方, 行列 A, B, C においては

$$A(B+C) = AB + AC, \qquad (B+C)A = BA + CA$$

であり, 一般には $AB \neq BA$, $AC \neq CA$ であるので

$$A(B+C) \neq (B+C)A$$

である.

(5)

$$\begin{aligned}(A+B)(A+C) &= \left(\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & -1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 2\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & -1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}\right)\\ &= \begin{bmatrix}2 & 4\\ -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}2 & 20\\ 4 & -9\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}(A+C)(A+B) &= \left(\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & -1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & -1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 2\end{bmatrix}\right)\\ &= \begin{bmatrix}-1 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4\\ -3 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-14 & 0\\ -7 & 7\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(解説) 一般には $(A+B)(A+C) \neq (A+C)(A+B)$ である.

(7)

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B)\\ &= \begin{bmatrix}-2 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix}-8 & 12\\ -9 & -11\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(解説) $A^2 + 2AB + B^2$, つまり $\begin{bmatrix}-13 & 17\\ -4 & -6\end{bmatrix}$ ではない. 実数 a, b においては $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ が成り立ったが, 行列 A, B においては, 一般に

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

である.

(8) $A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ であるので (1), (4) より

$$\begin{aligned} A^2 + A(B+C) + BC &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 20 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 25 \\ 9 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(解説) (5) の結果と比べると $(A+B)(A+C) \neq A^2 + (B+C)A + BC$ であることがわかる．実数 a, b, c について $(a+b)(a+c) = a^2 + (b+c)a + bc$ が成り立ったが, これは $(a+b)(a+c) = (a+b)a + (a+b)c = a^2 + ba + ac + bc = a^2 + ba + ca + bc = a^2 + (b+c)a + bc$ であるから．一方, 行列については一般に $AC \neq CA$ のため,

$$(A+B)(A+C) \neq A^2 + (B+C)A + BC$$

である．もちろん, 一般には $AB \neq BA$ だから

$$(A+B)(A+C) \neq A^2 + A(B+C) + BC$$

でもある．確かめよ．

(9) (1), (2), (3), (8) より

$$\begin{aligned} A^2 + BA + AC + BC &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 13 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 20 \\ 4 & -9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(解説) この結果は (5) の結果と一致する．一般に

$$(A+B)(A+C) = A^2 + BA + AC + BC$$

が成り立つ．何故なら $M = A + C$ とおくと

$$(A+B)(A+C) = (A+B)M = AM + BM$$

であり, M を $A + C$ に戻すと

$$AM + BM = A(A+C) + B(A+C) = A^2 + AC + BA + BC = A^2 + BA + AC + BC$$

したがって

$$(A+B)(A+C) = A^2 + BA + AC + BC$$

である．

(10)

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A - B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

より,

$$(A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -9 \end{bmatrix}$$

である．

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

より

$$A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

である.

(解説) 実数 a, b においては $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ が成り立ったが, 行列 A, B においては,

$$(A+B)(A-B) = A^2 - BA + AB - B^2$$

であるので, $AB \neq BA$ のときは

$$(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$$

である. もちろん (5), (6) で確認したように

$$(A+B)(A-B) \neq (A-B)(A+B)$$

であることも忘れてはならない. 確認せよ.

問題 4.12.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 11 & -17 \\ 3 & -1 & 16 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -9 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 11 & -17 \\ 3 & -1 & 16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & -18 \\ 4 & 4 & 16 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6 & 9 & 0 \\ 3 & -13 & 7 \\ 0 & 9 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

または, 展開して

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 11 & -17 \\ 3 & -1 & 16 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -9 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 11 & -17 \\ 3 & -1 & 16 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -9 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 35 & -68 \\ 19 & 73 & -55 \\ -6 & 1 & -31 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -3 & 13 & -34 \\ 8 & 43 & -31 \\ -3 & -4 & -17 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 35 & -68 \\ 19 & 73 & -55 \\ -6 & 1 & -31 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 26 & -68 \\ 16 & 86 & -62 \\ -6 & -8 & -34 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6 & 9 & 0 \\ 3 & -13 & 7 \\ 0 & 9 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

としても良いが, こちらの計算は行列の積を 2 回行わないといけないので面倒になる.

問題 4.13. 行列 A, B を

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

とし, X は 2 次正方行列であり, 等式

$$BXA = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \cdots \qquad (*)$$

を満たす. 次の問いに答えよ.

(1) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2$

(解説) $BA = E_2$ でもある. n 次正方行列 A, B が $AB = BA = E_n$ を満たすとき, B を A の逆行列と呼び, A^{-1} と表す. 今の場合 B は A の逆行列であり, A も B の逆行列である. つまり

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B^{-1} = A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

である.

(2) 逆行列の性質より, 両辺左から B^{-1}, 右から A^{-1} を掛けると, $(*)$ の左辺は

$$B^{-1}BXAA^{-1} = E_2XE_2 = X$$

$(*)$ の右辺は

$$B^{-1}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 6 \\ -18 & 11 \end{bmatrix}$$

となるので

$$(*) \Longrightarrow X = \begin{bmatrix} -10 & 6 \\ -18 & 11 \end{bmatrix}$$

であり, 逆に, この X は $(*)$ を満たすので,

$$X = \begin{bmatrix} -10 & 6 \\ -18 & 11 \end{bmatrix}$$

である.

(3) 仮定より

$$(BXA)^n = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n \qquad \cdots \qquad (**)$$

である. 逆行列の性質を利用すると $(**)$ の左辺は

$$\begin{aligned}
(BXA)^n &= \underbrace{(BXA)(BXA)(BXA)\cdots(BXA)(BXA)}_{n} \\
&= BX(AB)X(AB)X(AB)\cdots(AB)X(AB)XA \\
&= BXE_2XE_2XE_2\cdots E_2XE_2XA \\
&= B\underbrace{XXX\cdots XX}_{n}A \\
&= BX^nA
\end{aligned}$$

である. 一方, 対角行列の積の性質より $(**)$ 右辺は

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

であるので

$$(**) \iff BX^nA = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

を得る. この両辺の左から B^{-1}, 右から A^{-1} を掛けると

$$\begin{aligned} X^n &= B^{-1}\begin{bmatrix}(-1)^n & 0\\ 0 & 2^n\end{bmatrix}A^{-1}\\ &= \begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-1)^n & 0\\ 0 & 2^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}4\cdot(-1)^n-3\cdot 2^n & 2\cdot(-1)^{n+1}+2^{n+1}\\ 6\cdot(-1)^n-3\cdot 2^{n+1} & 3\cdot(-1)^{n+1}+2^{n+2}\end{bmatrix} \end{aligned}$$

を得る.

ここで $n=1,2,\cdots$ について

$$X^n = \begin{bmatrix}4\cdot(-1)^n-3\cdot 2^n & 2\cdot(-1)^{n+1}+2^{n+1}\\ 6\cdot(-1)^n-3\cdot 2^{n+1} & 3\cdot(-1)^{n+1}+2^{n+2}\end{bmatrix}$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す.

[I] $n=1$ のとき

$$X^1 = \begin{bmatrix}4\cdot(-1)^1-3\cdot 2^1 & 2\cdot(-1)^{1+1}+2^{1+1}\\ 6\cdot(-1)^1-3\cdot 2^{1+1} & 3\cdot(-1)^{1+1}+2^{1+2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4-6 & 2+4\\ -6-12 & 3+8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-10 & 6\\ -18 & 11\end{bmatrix} = X$$

で成り立つ.

[II] $n=k$ のとき

$$X^k = \begin{bmatrix}4\cdot(-1)^k-3\cdot 2^k & 2\cdot(-1)^{k+1}+2^{k+1}\\ 6\cdot(-1)^k-3\cdot 2^{k+1} & 3\cdot(-1)^{k+1}+2^{k+2}\end{bmatrix}$$

が成り立つと仮定すると, $n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned} X^{k+1} &= XX^k\\ &= \begin{bmatrix}-10 & 6\\ -18 & 11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\cdot(-1)^k-3\cdot 2^k & 2\cdot(-1)^{k+1}+2^{k+1}\\ 6\cdot(-1)^k-3\cdot 2^{k+1} & 3\cdot(-1)^{k+1}+2^{k+2}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-40\cdot(-1)^k+30\cdot 2^k+36\cdot(-1)^k-18\cdot 2^{k+1} & -20\cdot(-1)^{k+1}-10\cdot 2^{k+1}+18\cdot(-1)^{k+1}+6\cdot 2^{k+2}\\ -72\cdot(-1)^k+54\cdot 2^k+66\cdot(-1)^k-33\cdot 2^{k+1} & -36\cdot(-1)^{k+1}-18\cdot 2^{k+1}+33\cdot(-1)^{k+1}+11\cdot 2^{k+2}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}40\cdot(-1)^{k+1}+15\cdot 2^{k+1}-36\cdot(-1)^{k+1}-18\cdot 2^{k+1} & 20\cdot(-1)^{k+2}-5\cdot 2^{k+2}-18\cdot(-1)^{k+2}+6\cdot 2^{k+2}\\ 72\cdot(-1)^{k+1}+27\cdot 2^{k+1}-66\cdot(-1)^{k+1}-33\cdot 2^{k+1} & 36\cdot(-1)^{k+2}-9\cdot 2^{k+2}-33\cdot(-1)^{k+2}+11\cdot 2^{k+2}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}4\cdot(-1)^{k+1}-3\cdot 2^{k+1} & 2\cdot(-1)^{(k+1)+1}+2^{(k+1)+1}\\ 6\cdot(-1)^{k+1}-3\cdot 2^{(k+1)+1} & 3\cdot(-1)^{(k+1)+1}+2^{(k+1)+2}\end{bmatrix} \end{aligned}$$

となり, $n=k+1$ においても成り立つ.

以上 [I][II] により, $n=1,2,\cdots$ において

$$X^n = \begin{bmatrix}4\cdot(-1)^n-3\cdot 2^n & 2\cdot(-1)^{n+1}+2^{n+1}\\ 6\cdot(-1)^n-3\cdot 2^{n+1} & 3\cdot(-1)^{n+1}+2^{n+2}\end{bmatrix}$$

である.

(解説) X^1, X^2, X^3, $\cdots$ と具体的に計算しても X^n を推測することは難しい.(やってみよ.) 上の計算のアイデアを理解しておこう. つまり, X^n を推測することが難しくても

$$A^{-1}XA = (\text{対角行列})$$

とできる行列 A があるならば X^n は (3) の方法で求まる.

5 行列と連立 1 次方程式

問題 5.1.

$$(\text{左辺}) = A\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\1 & 2 & 0\\0 & 3 & -2\\-3 & 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\0\\-9\\-4\end{bmatrix}$$

であり,

$$(\text{右辺}) = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix}2c_1\\c_1\\0\\-3c_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-c_2\\2c_2\\3c_2\\4c_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\-2c_3\\2c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2c_1 - c_2\\c_1 + 2c_2\\3c_2 - 2c_3\\-3c_1 + 4c_2 + 2c_3\end{bmatrix}$$

であるので, 与えられた方程式は

$$\begin{bmatrix}2c_1 - c_2\\c_1 + 2c_2\\3c_2 - 2c_3\\-3c_1 + 4c_2 + 2c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\0\\-9\\-4\end{bmatrix}$$

すなわち

$$\begin{cases}2c_1 - c_2 = 5\\c_1 + 2c_2 = 0\\3c_2 - 2c_3 = -9\\-3c_1 + 4c_2 + 2c_3 = -4\end{cases}$$

と同値である. これを解くと

$$\begin{cases}c_1 = 2\\c_2 = -1\\c_3 = 3\end{cases}$$

を得る.

問題 5.2. 例えば

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= A\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\\vdots & \vdots & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}2a_{11} - a_{12} + 3a_{13}\\2a_{21} - a_{22} + 3a_{23}\\\vdots\\2a_{n1} - a_{n2} + 3a_{n3}\end{bmatrix}\\
&= 2\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}a_{13}\\a_{23}\\\vdots\\a_{n3}\end{bmatrix}\\
&= 2\boldsymbol{a}_1 + (-1)\boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{a}_3\end{aligned}$$

と変形出来るので,

$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = 3 \end{cases}$$

でよい.

(解説) c_1, c_2, c_3 は $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ によっては, 唯一組に定まらない. 例えば,

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

のとき,

$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = 3 \end{cases}$$

において

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3$$

は満たすが

$$\begin{cases} c_1 = 6 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

でも満たす.(その他にもある.)

問題 5.3. 与えられた方程式において

$$(\text{左辺}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

であるので, 与えられた方程式は連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 3x_2 & = & -1 \\ x_1 & - & x_2 & = & 2 \end{cases}$$

と同値である. 連立 1 次方程式を解いて,

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & -1 \end{cases}$$

を得る.

(解説) 行列の方程式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

は連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

と同値である.

問題 5.4. 与えられた方程式において

$$(\text{左辺}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}$$

であるので, 与えられた方程式は連立 1 次方程式

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & = & 8 \end{array} \right.$$

と同値である. 連立 1 次方程式を解いて,

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x_1 & = & 2 \\ x_2 & = & -3 \end{array} \right.$$

を得る.

問題 5.5. 与えられた方程式について

$$(\text{左辺}) = x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + 5x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$$

であるので, 与えられた方程式は連立 1 次方程式

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 5x_2 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

と同値である. 連立 1 次方程式を解いて,

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x_1 & = & \dfrac{3}{2} \\ x_2 & = & -\dfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

を得る.

(解説) 列ベクトルの方程式

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

は行列の方程式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

や, 連立 1 次方程式

$$\left\{ \begin{array}{rcrcccrcr} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

と同値である.

問題 5.6. 与えられた方程式について

$$(\text{左辺}) = x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

であるので, 与えられた方程式は連立 1 次方程式

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & x_2 & = & -1 \\ x_1 & - & x_2 & = & 2 \end{array}\right.$$

と同値である. 連立 1 次方程式を解いて,

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 & = & \dfrac{1}{4} \\ x_2 & = & -\dfrac{7}{4} \end{array}\right.$$

を得る.