ランダウの記号入門

立命館大学理工学部数学学修相談会

2017 年 7 月 4 日 *

概要

ランダウの記号の定義と関数の極限をマクローリン展開 (テイラー展開) を用いて求める例を紹介する.

1 はじめに

関数の極限を考えるときに, 主要な部分にだけ集中して考えたいときがある. 主要でない部分をひとまとめにするときに, ランダウの記号は非常に有効である.

例えば, 極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x}$$

は $\dfrac{0}{0}$ 型の不定形であり, 分母分子を何回か微分しても, しばらくは不定形が現れる. ロピタルの定理を何回か用いれば求める事は可能であるが, 実際にやってみると非常に面倒である.

しかし, マクローリンの定理を用いて計算すると, それほど複雑な計算にはならない. ただし, そのまま記述していくと, 非常に表記が面倒なことになり, 極限を求めるという本来の目的においては無駄な記述が多くなる. そこで登場するのが, ランダウの記号である.

これより, 極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x}$$

をランダウの記号を用いて導くまでを説明する.

問題 1.1. 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x}$ をロピタルの定理を用いて求めよ.

2 ランダウの記号の定義

定義 2.1. 実数 a の十分近くで定義された関数 $f(x)$, $g(x)$ について a に十分近い $x(\neq a)$ について

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqq C$$

を満たす, 定数 C が存在するとき,

$$f(x) = O(g(x)) \qquad (x\to a)$$

* 執筆 平岡由夫

と記し,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

が成り立つとき

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to a),$$

と記す. O や o はそれぞれ, ビッグオー, スモールオーと呼ばれるが, ギリシャ語のオミクロンである. この表記 O や o を**ランダウの記号**, O や o を用いた "$f(x) = O(g(x))$" や "$f(x) = o(g(x))$" などの記法を**ランダウの記法**という.

$x \to \infty$ の場合なども定義できるが, ここでは扱わない.

例 2.1. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ であるので

$$\sin x = O(x) \quad (x \to 0)$$

である.

例 2.2. $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = 0$ のとき

$$f(x) = o(1) \qquad (x \to a)$$

である.

例 2.3. 正の整数 n について $\displaystyle\lim_{x \to 0} x^n = 0$ であるので $x \to 0$ のとき

$$x^3 = o(x^2), \qquad x^3 = o(x)$$

である.

例 2.4. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$ であるので

$$\sin x - x = o(x^2) \qquad (x \to 0)$$

である.

ランダウの記法 $o(g(x))$ についていくつか説明を加える.

a の十分近くで定義される関数 $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$ について, $x \to a$ のとき $\psi(x) = o(g(x))$ であり, $f(x)$ が

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

と表されているときは単に

$$f(x) = \varphi(x) + o(g(x)) \qquad (x \to a)$$

と記し, 同様に

$$f(x) = \varphi(x)\psi(x)$$

と表されているときは単に

$$f(x) = \varphi(x)o(g(x)) \qquad (x \to a)$$

と記す.

例 2.5. 例 2.4 より

$$\sin x = x + o(x^2) \qquad (x \to 0)$$

である.

また, a の十分近くで定義される関数 $f(x), \varphi(x), \psi(x), g(x), h(x)$ について, $x \to a$ のとき $\varphi(x) = o(g(x))$, $\psi(x) = o(h(x))$ であり, $f(x)$ が

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

であるなら

$$f(x) = o(g(x)) + o(h(x)) \qquad (x \to a),$$

同様に

$$f(x) = \varphi(x)\psi(x)$$

であるなら

$$f(x) = o(g(x))o(h(x)) \qquad (x \to a)$$

と記す.

例 2.6. $f(x) = 3x^3 - 4x^2$ のとき $x \to 0$ において $3x^3 = o(x^2)$, $-4x^2 = o(x)$ だから

$$f(x) = o(x^2) + o(x) \qquad (x \to 0)$$

である.

3 $o(x^n)$ について

特に, $x \to 0$ のときの $o(x^n)$ について扱う.

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ のとき

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{f(x)}{x^2} = 0$$

なので $x \to 0$ のとき

$$f(x) = o(x^2) \Longrightarrow f(x) = o(x)$$

が成り立つ. これを 「$o(x^2)$」 である 左辺の 関数は 「$o(x)$」であると言う意味で

$$o(x^2) = o(x) \qquad (x \to 0)$$

と記す.

例 3.1. c を定数としたとき $x \to 0$ について

$$cx^6 = o(x^5) = o(x^4) = o(x^3) = o(x^2) = o(x) = o(1)$$

が成り立つ.

注意 3.1. $x \to 0$ のとき

$$o(x^2) = o(x)$$

は成り立つが, (左辺と右辺を入れ替えた)

$$o(x) = o(x^2)$$

は 成り立たない[*1]. 左辺に存在するときと右辺に存在するときでは, ランダウの記号の意味が異なることに注意すること. 例 3.1 においては 右に行けば行くほど関数の評価が甘くなっているのである.

4 ランダウの記号の性質

定理 4.1. m, n を正の整数とする. $x \to 0$ のとき次の (1) ∼ (4) が成り立つ.

(1) c が定数のとき $m < n$ ならば $cx^n = o(x^m)$
(2) $x^m o(x^n) = o(x^{m+n})$
(3) $o(x^m)o(x^n) = o(x^{m+n})$
(4) $m \leqq n$ ならば $o(x^m) + o(x^n) = o(x^m)$

(証明) (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{cx^n}{x^m} = \lim_{x\to 0} cx^{n-m} = 0$ より.
(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^m o(x^n)}{x^{m+n}} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0$ より.
(3) 略　(4) 略 □

問題 4.1. 定理 4.1 の (3) および (4) を示せ.

例 4.2. $x \to 0$ のとき

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2 &= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{36}x^6 + 2xo(x^3) - \frac{1}{3}x^3 o(x^3) + o(x^3)o(x^3) \\ &= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5) + o(x^4) + o(x^6) + o(x^6) \\ &= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \qquad (1)\end{aligned}$$

5 マクローリンの定理の極限への応用

次のマクローリンの定理 (またはテイラーの定理) はあらゆる教科書に登場する[*2]ので証明は省く.

定理 5.1 (マクローリンの定理)**.** I を原点を含む開区間とする. $f(x)$ が I において C^n 級であるとき,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n,$$
$$R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n, \quad (0 < \theta < 1)$$

をみたす θ が存在する.

例 5.1. $f(x) = \sin x$ として $n = 4$ において定理を適用すれば

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + R_4,$$
$$R_4 = \frac{\sin(\theta x)}{24}x^4 \qquad (0 < \theta < 1)$$

[*1] 例えば $f(x) = x^2$ は $x \to 0$ のとき $f(x) = o(x)$ だが $f(x) = o(x^2)$ ではない
[*2] ただし, 剰余項 R_n は少し異なる形の場合もあるので注意すること.

を得る.

$|\sin(\theta x)| \leqq 1$ に注意すれば, 例 5.1 において

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_4}{x^3} = 0$$

である. したがって

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \qquad (x \to 0) \tag{2}$$

を得る.

最後に極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x}$ を求めよう. $x \neq 0$ のとき

$$\frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} = \frac{\dfrac{\sin^2 x - x^2}{x^n}}{\dfrac{x^2 \sin^2 x}{x^n}} \quad (n \text{ は整数})$$

が成り立つことに注意して, 整理する. (1) および (2) より $x \to 0$ のとき

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$$

である. したがって, 分子について

$$\sin^2 x - x^2 = -\frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \quad (x \to 0)$$

であるから, $x \to 0$ のとき

$$\frac{\sin^2 x - x^2}{x^4} = -\frac{1}{3} + \frac{o(x^4)}{x^4} \longrightarrow -\frac{1}{3}$$

一方, 分母については

$$x^2 \sin^2 x = x^2\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\right) = x^4 + o(x^4) \quad (x \to 0)$$

であるから, $x \to 0$ のとき

$$\frac{x^2 \sin^2 x}{x^4} = 1 + \frac{o(x^4)}{x^4} \longrightarrow 1$$

を得る. すなわち, 関数の商の極限の性質より

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin^2 x - x^2}{x^4}}{\dfrac{x^2 \sin^2 x}{x^4}} = \frac{-\dfrac{1}{3}}{1} = -\frac{1}{3}$$

である.

6 マクローリン展開

マクローリン展開における剰余項 R_n について

$$\lim_{x\to 0} \left|\frac{R_n}{x^{n-1}}\right| = \lim_{x\to 0} \left|\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x\right| = 0$$

が成り立つのでランダウの記号を用いてマクローリン展開を書き記せば以下のようになる.

(1) $x \to 0$ のとき

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + o(x^{n-1})$$

(2) $x \to 0$ のとき

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m})$$

(3) $x \to 0$ のとき

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m})$$

(4) $x \to 0$ のとき

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n-1} + o(x^{n-1})$$

(5) $x \to 0$ のとき

$$(1+x)^a = 1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-m)}{(m+1)!}x^{m+1}+o(x^{m+1})$$

注意 (2)(3) においては $n = 2m+1$, (5) においては $n = m+2$ としてマクローリンの定理を適用した.

参考書籍

本文に登場する語句, 記号, 問題は次の書籍を参考にした.

三宅敏恒　『入門微分積分』　(培風館)

荒井正治　『理工系 微積分学 – 第 3 版 – 』　(学術図書出版社)

解答

問題 1.1 $-\dfrac{1}{3}$

問題 4.1 (3) については

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^m)o(x^n)}{x^{m+n}} = \lim_{x\to 0}\frac{o(x^m)}{x^m}\frac{o(x^n)}{x^n} = 0$$

より．(4) については

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^m)+o(x^n)}{x^m} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{o(x^m)}{x^m} + x^{n-m}\frac{o(x^n)}{x^n}\right) = 0$$

より．